

FUNKCIJŲ EILUTĖS

Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \quad (1)$$

kurių nariai yra realiosios kintamojo $x \in \mathbf{R}$ funkcijos. Tokią eilutę vadinsime funkcijų eilute. Jeigu kintamajam x suteikiame konkrečią reikšmę, tai (1) eilutė virsta skaičių eilute. Skirtingas x reikšmės atitiks, apskritai tarus, skirtingos skaičių eilutės. Esant vienoms x reikšmėms, eilutė gali konverguoti, kitoms – diverguoti.

1 apibrėžimas. Tokių x reikšmių, kurioms duotoji funkcijų eilutė konverguoja, aibė vadinama eilutės **konvergavimo sritimi**. Konvergavimo sritis paprastai žymima D .

Konvergavimo sritį dažnai pavyksta rasti, panaudojus žinomus pakankamus skaičių eilutės konvergavimo požymius –

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = L < 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = L < 1 \text{ ir panašiai.}$$

1 pavyzdys. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ konvergavimo sritį.

◁ Panaudoję D'alamberto požymį, gauname: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^{2n}} = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = x^2$. Iš čia išplaukia, kad, esant $x^2 < 1$ (t.y. $|x| < 1$), eilutė konverguoja; kai $x^2 > 1$ - diverguoja. Jeigu $x^2 = 1$, gauname diverguojančią harmoninę eilutę.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in (-1; 1)$. ▷

2 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in (-\infty; \infty)$.

3 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n x$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n x$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$.

4 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in [-1; 1]$.

5 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ absoliučiai konverguoja intervale $x \in (-1; 1)$; reliatyviai taške $x = -1$.

6 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in (-1; 1)$.

7 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ absoliutaus konvergavimo sritis yra $x \in (-\infty; \infty)$.

8 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ absoliutaus konvergavimo sritys yra $x \in (-\infty; \infty)$.

9 užduotis. Rasti eilutės $x \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) + x^3 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right) + \dots + x^n \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right) + \dots$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutė konverguoja absoliučiai, kai $|x| < 2$.

10 užduotis. Rasti eilutės $e^{-x} + xe^{-4x} + e^{-8x} + \dots + e^{-n^2x} + \dots$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutė konverguoja absoliučiai, kai $x > 0$.

11 užduotis. Rasti eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ konvergavimo sritį.

Ats: Eilutė konverguoja absoliučiai, kai $|x| > 1$.

2 apibrėžimas. Funkcijų eilutę $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, sudarytą iš tolydžių funkcijų $f_n(x)$, vadinsime mažoruojama intervale, jeigu egzistuoja teigiama konverguojanti skaičių eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tokia, kad

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

visiems x iš intervalo D .

Pastaba: Skaičių eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ vadinama funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ mažorante ir sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ yra mažoruojama skaičių eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Tolygaus konvergavimo pakankamas kriterijus (**Vejerštraso**).

Teorema. Jeigu funkcijų eilutei $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ galima nurodyti tokią teigiamą konverguojančią skaičių eilutę $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kad su visais $n \geq n_0$ ir visais $x \in D$ teisinga nelygybė $|u_n(x)| \leq a_n$ tuomet funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai aibėje D .

1 pavyzdys. Funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt[3]{xn}}{n^5}$ yra mažoruojama eilutė, nes $\left| \frac{\sin \sqrt[3]{xn}}{n^5} \right| \leq \frac{1}{n^5}$. Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ - konverguojanti.

2 pavyzdys. Funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + n^3}$ yra mažoruojama eilutė, nes $\left| \frac{1}{x^4 + n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ - konverguojanti.

3 pavyzdys. Funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$ yra mažoruojama eilutė, nes $\left| \frac{\sin nx}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n}$. Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ - konverguojanti (geometrinė progresija $|q| < 1$).

N.D.!!!!!!!

Raskite funkcijų eilutės konvergavimo sritį:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}.$$