

Laipsninė eilutė

1 apibrėžimas. Funkcijų eilutė $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$ (c_n, x_0 - pastovieji realieji skaičiai, x - realusis kintamasis) vadinama laipsnine eilute. Skaičiai $c_n, n=0,1,2,\dots$, vadinami eilutės koeficientais.

Pakeitę eilutėje $x-x_0=y$, gausime $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n y^n$, todėl konvergavimą ir savybes patogiau tirti paprastesnės eilutės $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n y^n$ atveju.

2 apibrėžimas. Laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ konvergavimo spinduliu vadiname neneigiamą skaičių R (arba $+\infty$) tokį, kad su visais $|x| < R$ eilutė konverguoja, o su visais $|x| > R$ ($R \neq +\infty$) eilutė diverguoja.

Eilutės $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ konvergavimo intervalas yra $(-R; R)$.

Eilutės $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$ konvergavimo intervalas yra $(x_0-R; x_0+R)$.

Patikrinę konvergavimą intervalo galuose, pilnai rasime eilutės konvergavimo sritį. Eilutės konvergavimo spindulį dažnai lengvai randame, naudodami pakankamus konvergavimo požymius, iš kurių išplaukia

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Jeigu riba begalinė, tuomet $R = +\infty$.

1 užduotis. Raskime eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergavimo spindulį.

2 užduotis. Raskime eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(\sqrt{2})^n}$ konvergavimo spindulį.

3 užduotis. Raskime eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ konvergavimo intervalą.

4 užduotis. Raskime eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$ konvergavimo sritį.

5 užduotis. Raskime eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} (x+2)^{2n+1}$ konvergavimo sritį.

Laipsninių eilučių savybės

1) Jei laipsninė eilutė konverguoja $(-R; R)$, tai kad ir kokią imtume skaičių $r < R$, ji konverguos tolygiai atkarpoje $[-r; r]$.

2) Laipsninės eilutės suma $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ yra tolydi funkcija kiekviename vidiniame konvergavimo intervalo $(-R; R)$ taške.

3) Laipsninę eilutę galime integruoti bet kurioje atkarpoje $[a; b] \subset (-R; R)$.

4) Laipsninę eilutę galima diferencijuoti panariui bet kuriame vidiniame intervalo $(-R; R)$ taške.

1 užduotis. Raskime sumą $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$

2 užduotis. Raskime sumą $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.