

Tema: Furjė eilutė

Funkcijos $f(x)$ Furjė eilutė:

čia

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, n = 1, 2, 3, \dots$$

a_0, a_n, b_n - Furjė koeficientai.

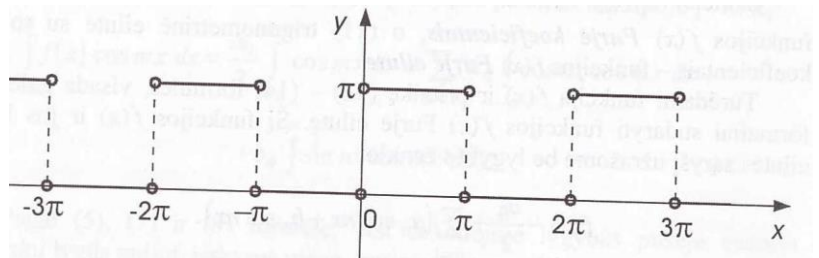
Dirichlė teorema. Jeigu periodinė funkcija $f(x)$, turinti periodą 2π , yra dalimis monotonišė ir aprėžta atkarpoje $[-\pi, \pi]$, tai jos Furjė eilutė konverguoja kiekviename tos atkarpos taške x , o jos suma yra lygi:

1) $f(x)$, kai x – funkcijos $f(x)$ tolydumo taškas,

2) $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, kai x – funkcijos $f(x)$ trūkio taškas.

1 uždutis. Periodinę funkciją

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \in (-\pi; 0), \\ \pi, & \text{kai } x \in (0; \pi) \end{cases}$$

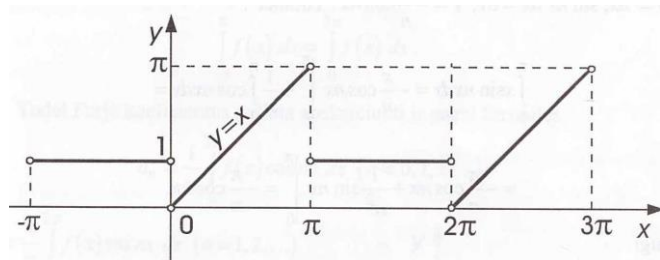


Kurios periodas 2π , išreikšime Furjė eilute.

Ats. $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ tolydumo taškuose ir kai x trūkio taškas $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2 uždutis. Periodinę funkciją

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in (-\pi; 0), \\ x, & \text{kai } x \in (0; \pi) \end{cases}$$



Kurios periodas 2π , išreikšime Furjė eilute.

Ats. $f(x) = \frac{\pi+2}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} + \frac{\pi-2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)}$; Trūkio taškuose $x = 0, 2\pi, \dots$ $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{2}$; $x = \pi, 3\pi, \dots$ $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{\pi+1}{2}$.

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furjė eilutės

Kai $f(x)$ – lyginė:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

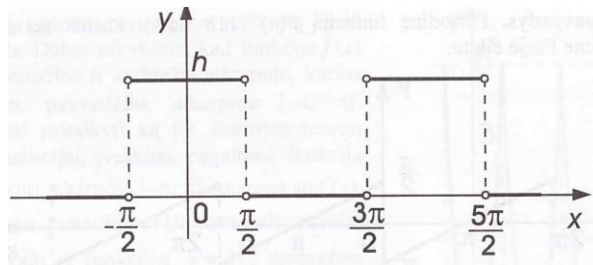
Kai $f(x)$ – nelyginė:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

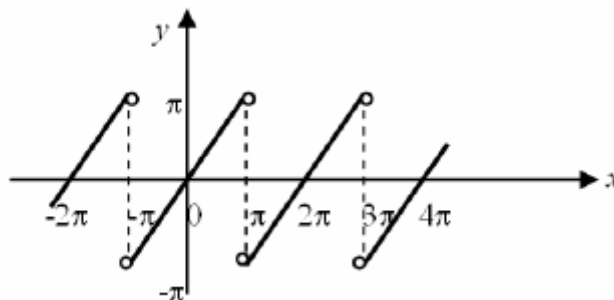
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

3 uždutis. Stačiakampį impulsą, pavaizduota paveiksle, išreikškime Furjė eilute.



Ats. $f(x) = \frac{h}{2} - \frac{2h}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2}}{2k+1} \cos(2k+1)x$. Trūkio taškuose šios eilutės suma lygi $\frac{h}{2}$.

4 uždutis. Periodinę funkciją $f(x)$, kurios periodas 2π , išreikškime Furjė eilute.



Ats. $f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. Trūkio taškuose šios eilutės suma lygi 0.

Funkcijų, kurių periodas $2l$, Furjė eilutės

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

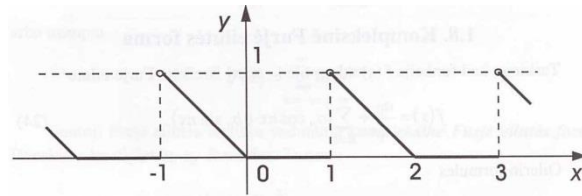
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

5 uždutis. Funkciją $f(x)$, kurios periodas $2l = 2$ atkarpoje $[-1; 1]$ apibrėžta formule

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kai } x \in (-1; 0], \\ 0, & \text{kai } x \in (0; 1]. \end{cases}$$

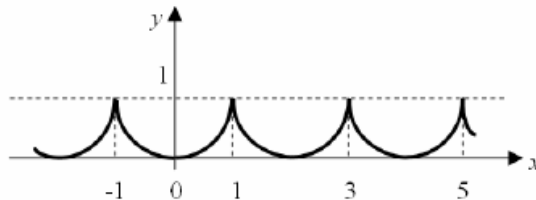
Išreikšime ją Furjė eilute.



$$\text{Ats. } f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k};$$

Trūkio taškuose $x = \pm 1, \pm 3, \dots$ eilutės suma lygi $\frac{1}{2}$.

6 uždutis. Periodinę funkciją $f(x) = x^2$, kai $x \in [-1; 1]$ pavaizduota paveikle išreikšime Furjė eilute.



$$\text{Ats. } f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos n\pi x}{n^2} \text{ visiems } x = (-\infty; +\infty), \text{ kadangi } f(x) \text{ yra tolydi visoje skaičių ašyje.}$$

7 uždutis. Funkciją $f(x)$, kurios periodas $2l = 4$ atkarpoje $[-2; 2]$ apibrėžta formule

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq -1 \\ x, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Išreikšime ją Furjė eilute.

8 uždutis. Funkciją $f(x)$, kurios periodas $2l = 4$ atkarpoje $[-2; 2]$ apibrėžta formule

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Išreikšime ją Furjė eilute.