

Teiloro eilutės

Kai taško x_0 aplinkoje funkcija $f(x)$ turi išvestines, kurių eilė siekia iki $(n+1)$, tai ją galima išreikšti **Teiloro eilute**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x_0, x),$$

čia $r_n(x_0, x)$ - liekamasis narys Lagranžo forma: $r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$, $|\xi - x_0| < |x - x_0|$;

Funkcija $f(x)$ galime išreikšti jos Teiloro eilute tada ir tik tada, kai $f(x)$ turi bet kurios eilės išvestines ir $r_n(x_0, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Kai $x_0 = 0$, tai iš Teiloro eilutės gauname **Makloreno eilutę**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Elementariųjų funkcijų Makloreno eilutės:

$$1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty$$

$$2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$$

$$3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty.$$

$$4) \quad \text{Binominė eilutė: } f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$5) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

$$6) \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad R = +\infty$$

$$7) \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad R = +\infty$$

1 uždutis. Apskaičiuokite 10^{-3} tikslumu $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

2 uždutis. Apskaičiuokite 10^{-5} tikslumu $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

3 uždutis. 10^{-3} tikslumu apskaičiuokite $\sqrt[3]{30}$.

4 uždutis. Išskleiskite funkcija $f(x) = x^3 \sqrt{27-2x}$ Makloreno eilute ir nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis eilutė konverguoja į funkcija $f(x)$.

5 uždutis. $f(x) = \frac{1}{2-3x}$ išskleisti Teiloro eilute taške $x = -1$.

Eilučių taikymas sprendžiant diferencialinę lygtį

Sakykime reikia rasti antros eilės diferencialinės lygties sprendinį, tenkinantį sąlygą: $y|_{x=x_0} = y_0$; $y'|_{x=x_0} = y'_0$.

Tarkime, kad šios lygties sprendinys $y = f(x)$ išreiškiamas eilute

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

1 užduotis. Diferencialinės lygties $y'' = (y')^2 + xy$ pradinės sąlygos yra: $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$. Raskime diferencialinės lygties sprendinio $f(x)$ pirmuosius keturis nelygus nuliui dėmenis.

Sprendimas:

Iš pradinių sąlygų turime: $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$

Iš lygties randame $f''(1)$:

$$f''(1) = 0^2 + 1 \cdot 1 = 1$$

Išdiferencijavę lygties abi puses, gauname:

$$y''' = 2y' \cdot y'' + y + xy', \text{ todėl } f'''(1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

Diferencijuojame dar kartą abi puses:

$$y^{IV} = 2(y''^2 + y' \cdot y''') + y' + y' + xy'' = 2(y''^2 + y' \cdot y''') + 2y' + xy'' \text{ ir } y^{IV}(1) = 2(1^2 + 0 \cdot 1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Įrašę apskaičiuotas reikšmes į $y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$ gauname diferencialinės lygties sprendinį, išreikšta eilute:

$$y = 1 + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{3}{4!}(x-1)^4 + \dots = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^4 + \dots$$

Taip pat galima spręsti įrašant į lygtį sprendinį išreikšta eilute $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$. Tuomet nežinomi koeficientai $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nustatomi neapibrėžtųjų koeficientų metodu.

2 užduotis. Išspręskime lygtį $(1-x^2)y'' - xy' = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Sprendimas:

Išdiferencijavę du kartus paėiliui eilutę $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ gauname:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Įrašę pradines sąlygas:

$$y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0 + \dots = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

Dabar y' ir y'' įrašome į lygtį:

$$(1-x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots) - x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = 0$$

Sulyginę koeficientus prie $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n \dots$ kairioje lygybės pusėje su koeficientais prie tokių pat laipsnių dešinėje lygybės pusėje gauname be galo daug lygčių:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2a_2 = 0 \\ x^1 & 3 \cdot 2 \cdot a_3 - a_1 = 0 \\ x^2 & -2 \cdot a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_2 = 0 \\ x^3 & -3 \cdot 2 \cdot a_3 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 - 3 \cdot a_3 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x^n & -n \cdot (n-1) \cdot a_n + (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} - n \cdot a_n = 0 \end{array}$$

iš čia

$$a_0 = 0; a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3 \cdot 2}; a_4 = \frac{4a_2}{4 \cdot 3} = 0; a_5 = \frac{9a_3}{5 \cdot 4} = \frac{9 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3}{5 \cdot 4 \cdot 2}; a_6 = \frac{16a_4}{6 \cdot 5} = 0; \dots$$

Įrašę šias koeficientų reikšmes į $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ gauname:

$$y = x + \frac{1}{3 \cdot 2} x^2 + \frac{3}{5 \cdot 4 \cdot 2} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arcsin x$$