

Tolygiai konverguojančių funkcijų eilučių savybės

1 teorema. Jeigu funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, sudaryta iš tolydžių funkcijų, mažoruojama intervale D , tuomet eilutės suma $S(x)$

yra tolydžioji funkcija intervale D , su visais $x_0 \in D$; kitaip tariant, eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ mažoravimo sąlyga yra pakankama jos sumos tolydumo sąlyga.

Išvada. Jei $S(x)$ tolydi, tai $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$, $x_0 \in D$.

1 užduotis. Rasti $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$.

2 teorema. Jeigu tolydžių funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ yra mažoruojama intervale D , tuomet kiekvienoje atkarpoje $[x_0, x] \in D$

teisinga lygybė $\int_{x_0}^x S(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x f_n(t) dt$; kitaip tariant, mažoruojamą eilutę galime integruoti panariui intervalo D viduje.

2 užduotis. Įrodyti, kad $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ yra tolydi intervale $(-\infty; +\infty)$ ir apskaičiuoti $\int_0^{2\pi} g(x) dx$.

3 teorema. Tarkime, kad funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ nariai – diferencijuojamos funkcijos atkarpoje $[a, b]$, o išvestinių eilutė

$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ yra tolydžių funkcijų mažoruojama eilutė atkarpoje $[a, b]$. Tuomet, konverguojant eilutei $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, jos suma $S(x)$ yra diferencijuojama funkcija atkarpoje $[a, b]$ ir, be to, teisinga lygybė

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b].$$

3 užduotis. Ar galima diferencijuoti panariui $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$?

4 užduotis. Ar galima diferencijuoti panariui $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$?

N.D. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

1) Įrodyti, kad $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2}$ yra tolydi intervale $(-\infty; +\infty)$ ir apskaičiuoti $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

2) Įrodyti, kad $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2 + x^2}$ yra tolydi intervale $(-\infty; +\infty)$ ir apskaičiuoti $\int_0^{\infty} S(x) dx$.