

EGZAMINO STRUKTŪRA

1 DALIS 6 testiniai klausimai **po 0.5 balo. (3 balai)**

- 1 klausimas.** Vektoriai ir pagrindiniai veiksmai su vektoriais (koordinatės, modulis, projekcija, vienetinis vektorius, skaliarinė sandauga ir k.t.).
Dviejų vektorių vektorinė sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimo formulė, geometrinės prasmės paaiškinimas.
Trijų vektorių mišrioji sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimo formulė, geometrinė prasmė, vektorių komplanarumas.
Bendroji plokštumos lygtis. Normalės vektorius.
Tiesės erdvėje kanoninės ir parametrinės lygtys. Tiesės einančios per du taškus lygtis. Bendroji tiesės erdvėje lygtis. Tiesės krypties vektorius.
Tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtys.
- 2 klausimas.** Antros eilės kreivės (elipsė, hiperbolė, parabolė): apibrėžimai, kanoninės lygtys, brėžiniai, pagrindinės charakteristikos.
Funkcijos tolydumo taške apibrėžimas: žinoti tris tolydumo apibrėžimus, sąryšį tarp šių apibrėžimų. Mokėti patikrinti, ar funkcija tolydi taške.
- 3 klausimas.** Trūkio taško apibrėžimas ir taškų klasifikacija. Mokėti nustatyti trūkio taško rūšį iš pateikto brėžinio.
Funkcijos $y = f(x)$ išvestinės apibrėžimas. Žinoti kaip randama išvestinė pagal apibrėžimą. Išvestinės geometrinė prasmė.
- 4 klausimas.** Funkcijos diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys.
Funkcijos diferencialo apibrėžimas ir jo geometrinė prasmė. Diferencialo formos invariantiškumo savybė.
- 5 klausimas.** Kreivės asimptotės apibrėžimas, pasviroji bei vertikalioji asimptotės.
Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių apibrėžimas ir geometrinė prasmė.
Dviejų kintamųjų funkcijos lokalieji ekstremumai. Būtinės ir pakankamos sąlygos.
- 6 klausimas.** Kelių kintamųjų sudėtinės funkcijos pilnosios ir dalinės išvestinės.
Neišreikštinių funkcijų $F(x, y) = 0$ arba $F(x, y, z) = 0$ dalinės išvestinės.
Kryptinė išvestinė: apibrėžimas, geometrinė prasmė, apskaičiavimo formulė.
Gradiento apibrėžimas. Gradiento ir kryptinės išvestinės sąryšis.

2 DALIS (7 balai)

- 1 uždavinys.* Vektoriai ir pagrindiniai veiksmai su vektoriais (koordinatės, modulis, projekcija, vienetinis vektorius, skaliarinė sandauga ir k.t.).
Dviejų vektorių vektorinė sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimas, geometrinė prasmė, kolinearumas.
Trijų vektorių mišrioji sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimas, geometrinė prasmė, vektorių komplanarumas.
Bendroji plokštumos lygtis. Normalės vektorius.
Tiesės erdvėje kanoninės ir parametrinės lygtys. Tiesės einančios per du taškus lygtis, bendroji tiesės lygtis. Tiesės krypties vektorius.
Tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtys.
- 2 uždavinys.* Antros eilės kreivės (apskritimas, elipsė, hiperbolė, parabolė): apibrėžimai, kanoninės lygtys, brėžiniai, pagrindinės charakteristikos. Mokėti kreives nubrėžti.
Funkcijos tolydumo taške apibrėžimas (trys tolydumo taške apibrėžimai). Mokėti patikrinti, ar funkcija tolydi taške.
Trūkio taško apibrėžimas ir taškų klasifikacija. Mokėti nustatyti trūkio taško rūšį ir pailiustruoti brėžiniais.
- 3 uždavinys.* Funkcijos $y = f(x)$ išvestinės apibrėžimas. Mokėti rasti išvestinę pagal apibrėžimą.
Funkcijos diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys.
- 4 uždavinys.* Funkcijos diferencialo apskaičiavimas.
Kreivės asimptotės (vertikaliosios, pasvirusios). Žinoti asimptočių apskaičiavimo formules bei mokėti jas taikyti.
- 5 uždavinys.* Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių apskaičiavimas.
Dviejų kintamųjų funkcijos lokalieji ekstremumai. Mokėti juos rasti.
Kelių kintamųjų sudėtinės funkcijos pilnosios ir dalinių išvestinių apskaičiavimas.
Neišreikštinių funkcijų $F(x, y) = 0$ arba $F(x, y, z) = 0$ dalinių išvestinių apskaičiavimas.
Kryptinės išvestinės apskaičiavimas, gradiento apskaičiavimas. Gradiento ir kryptinės išvestinės sąryšis.

Uždavinių pavyzdžiai, padėsiantys pasiruošti egzaminui:

1 uždavinys.

Vektoriai ir pagrindiniai veiksmai su vektoriais (koordinatės, modulis, projekcija, vienetinis vektorius, skaliarinė sandauga ir k.t.).

Duoti vektoriai $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (-2; 0; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; 1)$. Apskaičiuokite $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + 3\vec{c})$.	Ats.: 13
Vektoriai $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ir $\vec{b} = (-2; 0; 2)$ sudaro 120° kampą. Apskaičiuokite $ \vec{a} - \vec{b} $, kai $ \vec{a} = 3$ ir $ \vec{b} = 5$.	Ats.: 7
Apskaičiuokite $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$, kai $ \vec{a} = 3$ ir $ \vec{b} = 4$, o kampas $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.	Ats.: 4

Dviejų vektorių vektorinė sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimas, geometrinė prasmė, kolinearumas.

Lygiagretainis nubrėžtas ant dviejų vektorių $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ ir $\vec{n} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$. Apskaičiuokite jo plotą, kai $\vec{a} = (3; -1; -2)$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.	Ats.: $S = \sqrt{75}$
Trikampio viršūnės yra taškuose $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; -4)$, $C(1; 1; 8)$. Raskite trikampio ABC plotą bei aukštinės, nuleistos iš viršūnės A , ilgį.	Ats.: $S = 6\sqrt{5}$, $h = \sqrt{5}$
Įrodykite, kad $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, jei vektoriai yra kolinearūs.	
Suprastinkite reiškinį $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b}) + (4\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$ ir apskaičiuokite jo modulį, kai $ \vec{a} = 2$, $ \vec{b} = 3$ ir kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra $\varphi = 30^\circ$.	Ats.: 42

Trijų vektorių mišrioji sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimas, geometrinė prasmė, vektorių komplanarumas.

Taškai $A(x; 3; 1)$, $B(-2; -2; 1)$, $C(-4; 1; -2)$ ir $D(1; -1; 3)$ yra trikampės piramidės, kurios tūris $V = 2$, viršūnės. Raskite x .	Ats.: $-\frac{5}{9}$ ir $\frac{19}{9}$
Ar gali vektoriai $\vec{a} = (2; -3; 0)$, $\vec{b} = (-1; -2; -1)$ ir $\vec{c} = (-1; -4; -3)$ sudaryti gretasienį?	Ats.: taip, nes $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -32 \neq 0$
Duoti vektoriai $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = (5; -2; -1)$. Raskite jų mišriąją sandaugą ir paaiškinkite jos geometrinę prasmę.	Ats.: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ - jie komplanarūs
Patikrinkite, ar vektoriai $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ir $\vec{c} = \vec{j} + 2\vec{k}$ yra komplanarūs.	Ats.: nekomplanarūs
Su kokia x reikšme vektoriai $\vec{a} = (-2; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; -3; -1)$ ir $\vec{c} = (x; -4; 3)$ yra vienoje plokštumoje?	Ats.: 3

Bendroji plokštumos lygtis. Normalės vektorius.

Parašykite plokštumos, einančios per tašką $A(2; 1; -4)$ lygiagrečiai plokštumai $x + y - 2z + 3 = 0$, lygtį.	Ats.: $x + y - 2z - 11 = 0$
Patikrinkite, ar keturi taškai $A(3; 2; 7)$, $B(2; 0; 6)$, $C(1; -2; 5)$, $D(0; 0; 0)$ yra vienoje plokštumoje. Raskite šios plokštumos normalės vektorius.	Ats.: $\vec{n} = (24, -8, -8)$
Parašykite plokštumos lygtį, jei šiai plokštumai priklauso taškai $A(2, -1, 3)$ ir $B(3, 1, 2)$ ir ji yra lygiagreti vektoriui $\vec{a} = (3, -1, -4)$.	Ats.: $-9x + y - 7z + 40 = 0$
Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $A(2, 1, -1)$ ir statmenos tiesei $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.	Ats.: $2x + y - z - 6 = 0$
Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $A(4, -7, 6)$ ir statmenos Ox ašiai.	Ats.: $x - 4 = 0$
Patikrinkite ar plokštumos $2x - 4y + 5 = 0$ ir $4x + 2y + 3z - 1 = 0$ yra lygiagrečios ar statmenos.	Ats.: statmenos

Tiesės erdvėje kanoninės ir parametrinės lygtys. Tiesės einančios per du taškus lygtis, bendroji tiesės lygtis. Tiesės krypties vektorius.

Parašykite tiesės $x = t + 5, y = 2t - 1, z = -t + 2$ kanoninę išraišką ir užrašykite jos krypties vektorių.	Ats.: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1},$ $\vec{s} = (1; 2; -1)$
Parašykite tiesės $\frac{x-1}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ parametrines lygtis ir užrašykite jos krypties vektorių.	Ats.: $\begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 2t \\ z = -3t + 3 \end{cases}, \vec{s} = (6; 2; -3)$
Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus $A(4, -7, 6)$ ir $B(2, 1, -1)$.	Ats.: $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+7}{8} = \frac{z-6}{-7}$
Patikrinkite ar tiesės $x = 6t + 1, y = 2t - 1, z = 2t + 3$ ir $x = t + 5, y = 2t - 1, z = -5t + 2$ yra lygiagrečios ar statmenos.	Ats.: statmenos

Tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtys.

Kokios turi būti parametrai m ir A reikšmės, kad tiesė $x = 2t + 3, y = mt - 5, z = 6t + 1$ būtų statmena plokštumai $Ax - 2y + 3z - 5 = 0$?	Ats.: $m = -4; A = 1$
Kokia turi būti parametro n reikšmė, kad tiesė $x = 2 + 5t, y = -3 + 2t, z = 5 + nt$ būtų lygiagreti plokštumai $2x + 4y - 6z + 7 = 0$?	Ats.: $n = 3$

2 uždavinys.

Antros eilės kreivės (apskritimas, elipsė, hiperbolė, parabolė): apibrėžimai, kanoninės lygtys, brėžiniai, pagrindinės charakteristikos. Mokėti kreives nubrėžti.

Parašykite parabolės, kurios viršūnė yra koordinatų pradžioje, o židinis taške $F(-1; 0)$, lygtį.	Ats.: $y^2 = -4x$
Parašyti apskritimo kanoninę lygtį, kai žinomas jos centras $C(1; 0)$ ir taškas $A(4; -4)$.	Ats.: $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 25$
Raskite elipsės $4x^2 + y^2 = 1$ židinių, viršūnes, ašių ilgius, ekscentricitetą, nubrėžkite brėžinį. Kaip pasikeis elipsės kanoninė lygtis ir parametrai, jei jos centras bus $C(4, -2)$.	Ats.: $F_{1,2}\left(0; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right), V_{1,2}\left(\pm \frac{1}{2}; 0\right)$ ir $V_{3,4}(0; \pm 1), a = \frac{1}{2}, b = 1, e = \frac{\sqrt{3}}{2};$ po pakeitimo: $F_{1,2}\left(0; -2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right), V_{1,2}\left(4 \pm \frac{1}{2}; -2\right)$ ir $V_{3,4}(4; -2 \pm 1),$ $\frac{(x-4)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1.$
Raskite hiperbolės $4x^2 - 4y^2 = -1$ židinių, viršūnes, ašių ilgius, asimptotes, nubrėžkite brėžinį.	Ats.: $F_{1,2}\left(0; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), V_{1,2}\left(0; \pm \frac{1}{2}\right), a = b = \frac{1}{2}, y = \pm x.$

Funkcijos tolydumo taške apibrėžimas (trys tolydumo taške apibrėžimai). Mokėti patikrinti, ar funkcija tolydi taške.

Su kokia parametro a reikšme funkcija $y = \begin{cases} x+1, & x \neq 1, \\ 3+ax^2, & x = 1, \end{cases}$ taške $x = 1$ yra tolydi?	Ats.: $a = -1$
--	-----------------------

Trūkio taško apibrėžimas ir taškų klasifikacija. Mokėti nustatyti trūkio taško rūšį ir pailustruoti brėžiniais.

Nustatykite funkcijos $f(x) = \frac{x}{5-x}$ trūkio taško rūšį ir pavaizduoti grafiškai.	Ats.: $x = 5$ - II rūšies trūkio taškas.
Nustatykite funkcijos $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ 3-x^2, & x \geq 1, \end{cases}$ trūkio taško rūšį ir pavaizduoti grafiškai:	Ats.: $x = 1$ - ne trūkio taškas (funkcija tolydi).

3 uždavinys.

Funkcijos $y = f(x)$ išvestinės apibrėžimas. Mokėti rasti išvestinę pagal apibrėžimą.

Raskite funkcijų išvestines pagal apibrėžimą: $y = \sqrt{2x-4}$.	Ats.: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$.
Raskite funkcijų išvestines pagal apibrėžimą: $y = 3x$.	Ats.: $y' = 3$.
Raskite funkcijų išvestines pagal apibrėžimą: $y = \frac{3}{1-x}$.	Ats.: $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$.
Raskite funkcijų išvestines pagal apibrėžimą: $y = 3x^2 - x + 2$.	Ats.: $y' = 6x - 1$.

Funkcijos diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys.

Ar funkcija $y = x-1 $ diferencijuojama taške $x = 1$? Atsakymą pagrįskite.	Ats.: $f'(1) = \begin{cases} 1, \Delta x > 0 \\ -1, \Delta x < 0 \end{cases}$ nediferencijuojama, bet tolydi;
Rasti taškus, kuriuose funkcija $y = x $ yra nediferencijuojama, atsakymą pagrįskite.	Ats.: $f'(0) = \begin{cases} 1, \Delta x > 0 \\ -1, \Delta x < 0 \end{cases}$

4 uždavinys.

Funkcijos diferencialo apskaičiavimas.

Raskite funkcijos $y = 2\sqrt{1+x^2} + 3\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ diferencialą.	Ats.: $dy = y' \cdot dx = \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx$;
Raskite funkcijos $y = \sqrt{3\cos(2x)} + \arccos \frac{2x-1}{2}$ diferencialą ir apskaičiuokite jo reikšmę taške $x = 0$, kai $\Delta x = 0,02$.	Ats.: $dy = y' \cdot \Delta x = \left(\frac{-3\sin(2x)}{\sqrt{3\cos(2x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}} \right) \cdot \Delta x$; $dy _{x=0; \Delta x=0,02} = -\frac{\sqrt{3}}{75}$

Kreivės asimptotės (vertikaliosios, pasvirosios). Žinoti asimptotų apskaičiavimo formules bei mokėti jas taikyti.

Raskite funkcijos $y = \frac{x^2}{x-1}$ grafiko asimptotes.	Ats.: $x = 1$ - vertikalioji, $y = x+1$ - pasvirosi asimptotė;
Raskite funkcijos $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ grafiko asimptotes.	Ats.: $x = \pm 1$ - vertikaliosios asimptotės, $y = 1$ - horizontalioji asimptotė;
Raskite funkcijos $y = \frac{x}{2x^2+1}$ grafiko asimptotes.	Ats.: vertikaliosios nėra, $y = 0$ - horizontalioji asimptotė.

5 uždavinys.

Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių apskaičiavimas.

Raskite $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, kai $z = \frac{3x^2}{\ln y}$.	Ats.: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{\ln y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x}{y \ln^2 y}$
Raskite $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, kai $z = (2y)^{\frac{1}{x}}$.	Ats.: $\frac{\partial z}{\partial x} = (2y)^{\frac{1}{x}} \cdot \ln(2y) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right); \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot (2y)^{\frac{1}{x}-1} \cdot 2$.

Dviejų kintamųjų funkcijos lokalieji ekstremumai. Mokėti juos rasti.

Raskite funkcijos $z = 2x^2 + xy + 4y^2 - 1$ lokaliuosius ekstremumus.	Ats.: $z_{\min}(0; 0) = -1$
--	------------------------------------

Kelių kintamųjų sudėtinės funkcijos pilnosios ir dalinių išvestinių apskaičiavimas.

Duota funkcija $u = x^2 y^3, x = 2t^3, y = 3t^2$. Raskite pilnąją išvestinę $\frac{du}{dt}$.	Ats.: $\frac{du}{dt} = 2xy^3 \cdot 6t^2 + 3x^2 y^2 \cdot 6t$.
Duota funkcija $u = e^{x-2y}, x = z \sin t, y = t^2 + z$. Raskite dalines išvestines $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$.	Ats.: $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x-2y} \sin t - 2e^{x-2y};$ $\frac{\partial u}{\partial t} = ze^{x-2y} \cos t - 4te^{x-2y}$.
Pritaikyti sudėtinės funkcijos skaičiavimo formulę ir rasti $\frac{dz}{dt}$, kai $z = (2t)^{\frac{1}{t}}$.	Ats.: $\frac{dz}{dt} = vu^{v-1} \cdot 2 + u^v \ln u \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right), \text{ kai } u = 2t, v = \frac{1}{t}$.

Neišreikštinių funkcijų $F(x, y) = 0$ arba $F(x, y, z) = 0$ dalinių išvestinių apskaičiavimas.

Raskite $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, kai $z = \frac{3x^2 + z^y}{\ln y}$.	Ats.: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6x}{yz^{y-1} - \ln y}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z^y y \ln z \ln y - 3x^2 - z^y}{y \ln y (yz^{y-1} - \ln y)}$.
Raskite $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, kai $z = e^{xy} - \frac{y}{x^2}$.	Ats.: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3 (ye^{zy} - 1)}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zx^2 e^{zy} - 1}{x^2 (ye^{zy} - 1)}$.
Raskite $\frac{dy}{dx}$, kai $y^2 + 3x^2 = \frac{x^2}{\cos(x-y)}$.	Ats.: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x \cos(x-y) + x^2 \sin(x-y) - 6x \cos^2(x-y)}{-x^2 \sin(x-y) - 2y \cos^2(x-y)}$.

Kryptinės išvestinės apskaičiavimas, gradiento apskaičiavimas. Gradiento ir kryptinės išvestinės sąryšis.

Raskite funkcijos $u = xy^2 z^3$ kryptinę išvestinę taške $M(3; 2; 1)$ vektoriaus $\overrightarrow{MN}$ kryptimi, kai $N(5; 4; 2)$.	Ats.: $\frac{\partial u}{\partial s} \Big _M = \frac{68}{3}$
Raskite funkcijos $u = xyz$ kryptinę išvestinę taške $M(1; 1; 1)$ vektoriaus $\vec{s}$ kryptimi, jei jis su ašimis sudaro 60° kampus.	Ats.: $\frac{\partial u}{\partial s} \Big _M = \frac{3}{2}$
Raskite funkcijos $z = (xy)^{\sin z}$ didžiausią kryptinę išvestinę taške $A(1; 2; \frac{\pi}{2})$ (t.y. jos gradiento kryptimi).	Ats.: $\frac{\partial z}{\partial s} \Big _A = \sqrt{5}$
Rasti funkcijos $u = x^2 yz$ gradientą taške $M(2; 1; 1)$.	Ats.: $\text{grad } u _M = (4; 4; 4)$
Raskite vektorių, kurio kryptimi funkcijos $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ kitimo greitis būtų didžiausias taške $M(-1; 1; -1)$.	Ats.: $\text{grad } u _M = (2; 0; -2)$