

Funkcijos diferencialas

Priminimas: Teorema. Funkcija $f(x)$ taške $x = a$ turi **baigtinę ribą** b tada ir tik tada, kai ji išreiškiama suma $b + \alpha(x)$, kurioje $\alpha(x)$ yra nykstamoji funkcija, kai $x \rightarrow a$.

SVARBU!!!

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama intervale (a, b) t.y. egzistuoja baigtinė riba

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Šią lygybę užrašysime taip:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

čia $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, kai $\Delta x \rightarrow 0$.

Tada

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Kadangi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, tai $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$.

Taigi, funkcijos pokytį $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ sudaro du dėmenys: pirmasis ($f'(x)\Delta x$) vadinamas **pagrindine pokyčio dalimi**; antrasis ($\alpha(\Delta x)\Delta x$) yra aukštesnės eilės nykstamasis dydis negu Δx .

Apibrėžimas. Pagrindinė funkcijos $f(x)$ pokyčio Δy dalis $f'(x)\Delta x$ yra vadinama šios **funkcijos diferencialu** taške x ir žymima $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.

Argumento pokytis lygus jo diferencialui, nes kai $y = x$, $dy = dx = x'\Delta x = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$.

Iš čia gauname $dy = f'(x)dx$ ir $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

DIFERENCIALO FIZIKINĖ PRASMĖ

Kadangi $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, tai $\Delta y \approx dy$, kai $o(\Delta x)$ yra pakankamai mažas. Iš čia gauname

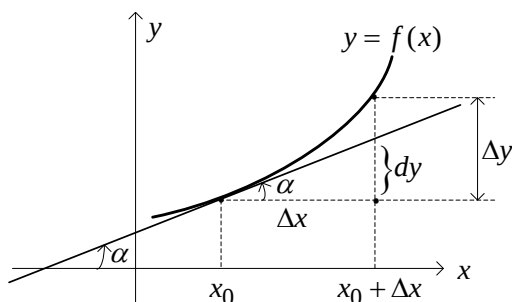
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

ir $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Fizikinė prasmė. Lygybę $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ galima taikyti apytiksliam skaičiavimui.

Pavyzdys. $\sqrt{65} = \sqrt{64 + 1} \approx \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}} \cdot 1 = 8 + \frac{1}{16} = 8.0625$

SVARBU!!!



DIFERENCIALO GEOMETRINĖ PRASMĖ

Funkcijos diferencialas lygus liestinės, nubrėžtos per tašką x_0 , ordinatės pokyčiui, kai argumento pokytis yra Δx .

$$[dy = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)\Delta x]$$

DIFERENCIALO SAVYBĖS

1. $d(c) = 0$, nes $c' = 0$;
2. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, nes $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
3. $d(u + v) = du + dv$,
nes $d(u + v) = (u + v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv$;

4. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$,
nes $d(u \cdot v) = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + u dv$;

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$,
nes $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{u'vdx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$;

6. **Diferencialo formos invariantiškumo savybė.**

Jei $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, tai $dy = f'(u)du$, t.y. sudėtinės funkcijos diferencialo forma yra tokia pati, kaip ir tuo atveju, jei u būtų nepriklausomas kintamasis.

Irodymas. $dy = dy(\varphi(x)) = (y(\varphi(x)))' dx = y'_u \cdot u'_x dx = f'(u)du$.

Funkcijos tyrimas

1 Teorema. Būtinasis funkcijos monotoniškumo požymis. Jei funkcija $f(x)$ intervale (a, b) didėja (mažėja), tai jos išvestinė tame intervale yra neneigiamą (neigiamą): $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

2 Teorema. Pakankamasis funkcijos monotoniškumo požymis. Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) intervale (a, b) , tai funkcija $f(x)$ tame intervale didėja: $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (mažėja: $f(x_2) - f(x_1) < 0$).

3 Teorema. Funkcijos pastovumo požymis. Jei funkcijos $f'(x) = 0$ intervale (a, b) , tai funkcija tame intervale yra pastovi: $f(x) = f(x_0) \forall x, x_0 \in (a, b)$.

Išvada. Jei dviejų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestinės sutampa intervale (a, b) , tai tos funkcijos skiriasi minėtame intervale tik konstanta, t.y. $f(x) - g(x) = C, x \in (a, b)$.

Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_1)$ vadinama funkcijos **maksimumu**, kai egzistuoja tokia taško x_1 aplinka $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ kurioje su visais x teisinga nelygybė $f(x) \leq f(x_1)$.

Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_2)$ vadinama funkcijos **minimumu**, kai egzistuoja tokia taško x_2 aplinka $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ kurioje su visais x teisinga nelygybė $f(x) \geq f(x_1)$.

Apibrėžimas. Funkcijos maksimumą ir minimumą vadinsime jos **ekstremumais**, o atitinkamas argumento reikšmes x_1 ir x_2 - ekstremumo taškai.

Teorema. Būtinė ekstremumo sąlyga.

Jei diferencijuojama funkcija $f(x)$ taške $x = x_0$ turi ekstremumą, tai $f'(x_0) = 0$ arba neegzistuoja.

Pastaba:

Jei $f(x_0)$ yra ekstremumas, tai būtinai $f'(x_0) = 0$ arba neegzistuoja, bet ne atvirkščiai.

Jei $f'(x_0) = 0$ tai to nepakanka, kad x_0 būtų ekstremumas.

Apibrėžimas. Visus taškus, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja, vadiname funkcijos **kritiniais taškais**.

1 Teorema. Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x)$ keičia ženklą, pereidama per kritinį tašką x_0 , tai taške x_0 funkcija $f(x)$ turi ekstremumą:

- a) **maksimumą**, kai $f'(x)$ keičia ženklą iš pliuso į minusą;
- b) **minimumą**, kai $f'(x)$ keičia ženklą iš minuso į pliusą.

2 Teorema. (2-oji lokaliajo ekstremumo sąlyga) Jei taške x_0 funkcijos $f(x)$ pirmoji išvestinė $f'(x) = 0$, o antroji išvestinė $f''(x_0)$ taško x_0 aplinkoje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ yra tolydi ir $f''(x) \neq 0$, tai taške x_0 funkcija $f(x)$ turi:

- a) **maksimumą**, kai $f''(x_0) < 0$;
- b) **minimumą**, kai $f''(x_0) > 0$.

Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės atkarpoje

Norėdami rasti funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes atkarpoje $[a, b]$, turime:

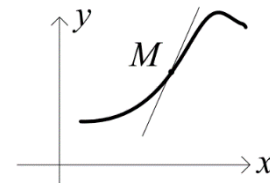
- a) rasti kritinius taškus, priklausančius intervalui $[a, b]$;
- b) apskaičiuoti funkcijos reikšmes kritiniuose taškuose ir intervalo galuose a ir b ;
- c) iš visų gautų reikšmių išrinkti didžiausią M ir mažiausią m reikšmę.

Funkcijos iškilumas

Apibrėžimas. Kreivė vadinama iškila aukštyn (žemyn) intervale (a, b) , jei visi tos kreivės taškai tame intervale yra po liestine (virš liestinės), nubrėžta per bet kurį kreivės tašką.

Perlinkio (vingio) taškai

Apibrėžimas. Taškas M , kuris atskiria iškilą aukštyn kreivės dalį nuo iškilos žemyn kreivės dalies, vadinamas



kreivės **perlinkio (vingio)** tašku.

Funkcijos iškilumas ir perlinkio (vingio) taškai

1 Teorema. Jei intervale (a, b) funkcija $f(x)$ turi antrąją išvestinę $f''(x)$, kuri yra neigiamą (teigiamą), tai kreivė tame intervale yra iškila aukštyn ($\cap$ (žemyn) $\cup$).

2 Teorema. (Būtinė perlinkio taško sąlyga.) Jei $f(x)$ intervale (a, b) turi tolydžią antrąją išvestinę ir taškas $x_0 \in (a, b)$ yra kreivės perlinkio taškas, tai $f''(x_0) = 0$.

3 Teorema. Jei $f''(x_0) = 0$ ir antroji išvestinė, pereidama tašką x_0 , keičia ženklą, tai taškas x_0 - kreivės perlinkio taškas.

Funkcijos grafiko asimptotės

Apibrėžimas. Tiesė vadinama kreivės asimptote, jei bet kurio kreivės taško atstumas iki tos tiesės artėja prie nulio, taškui tolstant kreivę.

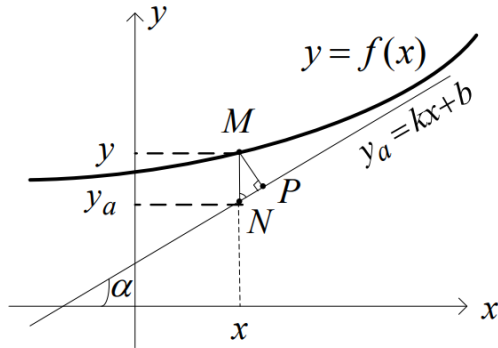
Asimptotės skirstomos į dvi grupes:

1. **Vertikaliosios asimptotės.** Jei nors vieną iš ribų

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

yra begalinė, tai tiesė $x = a$ yra vertikalioji asimptotė.

2. **Pasvirosios asimptotės.**



Pasvirosios asimptotės lygtis $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

Pastabos:

- 1) kai $k = 0$, gauname asimptotę $y = b$, lygiagrečią Ox ašiai (horizontalią asimptotę);
- 2) jei skaičiuodami koeficientus k ir b , gauname, kad bent viena iš ribų yra begalinė arba neegzistuoja, tai funkcijos grafikas pasvirosios asimptotės neturi;
- 3) ieškodami koeficientų k ir b , turime atsižvelgti į tai, kad užrašas $x \rightarrow \infty$ reiškia $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$. Todėl, reikalui esant skaičiuojame ribas abiem variantais, nes jos gali būti skirtingos.

1 Pavyzdys. Raskite funkcijos asimptotę: $y = \frac{4-x^2}{x-1}$.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

Raskite funkcijos diferencialą:

a) $y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-2}} - \cos x^2$;

b) $y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{2-x}} + \operatorname{tg} x^2$;

c) $y = e^x \cdot \sqrt{x^2 - 3} - \operatorname{tg}^2(2x - 1)$;

Raskite funkcijos asimptotes:

a) $y = \frac{x-2}{x+3}$;

b) $y = \frac{2x^2-9}{x+2}$;

c) $y = \frac{x^5}{x^4-1}$;

d) $y = x + e^{2x}$;

Ats: a) $x = -3$ (vertikalioji), $y = 1$ (pasviroji);
b) $x = -2$ (vertikalioji), $y = 2x - 4$ (pasviroji);
c) $x = \pm 1$ (vertikaliosios), $y = x$ (pasviroji);
d) $y = x$ (pasviroji), kai $x \rightarrow -\infty$.