

Dalinės išvestinės apibrėžimas

SVARBU!!! Tarkime, kad funkcija $z = f(x, y)$ yra apibrėžta srityje D , o taškas $M_0(x_0, y_0)$ yra vidinis srities D taškas. Jei argumentui y suteiksime pastovią reikšmę y_0 , tai gausime vieno kintamojo x funkciją $z = f(x, y_0)$. Apskaičiuosime šios funkcijos pokytį, kuris atsiranda dėl argumento pokyčio Δx . Jį žymėsime $\Delta_x z$ ir vadinsime daliniu funkcijos pokyčiu. Tai

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Analogiškai apibrėžiame pokytį

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Pokytis, kuris atsiranda pakitus abiem argumentams x ir y , vadinamas **pilnuoju** ir žymimas Δz .

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Bendru atveju $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Kadangi funkcija $z = f(x, y_0)$ yra vieno kintamojo funkcija, tai galima kalbėti apie jos diferencijavimą kintamojo x atžvilgiu, kai kitas argumentas fiksuotas.

Taip gauta funkcijos išvestinė vadinama **daline išvestine kintamojo x atžvilgiu** ir žymima $\frac{\partial z}{\partial x}$ arba z'_x .

Pagal išvestinės apibrėžimą

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

jei ši riba egzistuoja ir yra baigtinė.

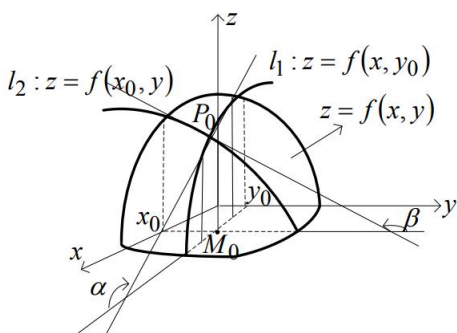
Analogiškai apibrėžiama $z = f(x_0, y)$ **daline išvestinė y atžvilgiu**:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Pavyzdys. Raskite funkcijų dalines išvestines:

- $z = x + y$
- $z = y^x$
- $z = xy + \frac{x}{y}$

SVARBU!!! Dalinės išvestinės geometrinė prasmė



Geometriškai $\frac{\partial z}{\partial x}$ reiškia, kad paviršius $z = f(x, y)$ kertamas plokštuma $y = y_0$. Ši plokštuma iš paviršiaus iškerta kreivę $z = f(x, y_0)$, esančią plokštumoje, lygiagrečioje plokštumai xOz .

Tuomet $tg \alpha = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, kurį kreivės $z = f(x, y_0)$ liestinė T sudaro su tiese $||Ox$ (t.y. dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial x}$ reikšmė, apskaičiuota taške M_0 , bus lygi tangentai kampui α , kurį kreivės $z = f(x, y_0)$ liestinė sudaro su tiese, lygiagrečia ašiai Ox).

Analogiškai $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = tg \beta$, kurį kreivės $z = f(x_0, y)$ liestinė sudaro su

tiese $||Oy$ (t.y. dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial y}$ reikšmė, apskaičiuota taške M_0 , bus lygi tangentai kampui β , kurį kreivės $z = f(x_0, y)$ liestinė sudaro su tiese, lygiagrečia ašiai Oy .)

Pilnasis funkcijos pokytis

Teorema. Jei funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės $f'_x(x, y)$ ir $f'_y(x, y)$ egzistuoja taške $M_0(x_0, y_0)$ ir jo aplinkoje bei yra tolydžios, tai funkcijos $z = f(x, y)$ pilnąjį pokytį galima išreikšti formule

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\end{aligned}$$

čia $\alpha \rightarrow 0$, kai $\Delta x \rightarrow 0$, ir $\beta \rightarrow 0$, kai $\Delta y \rightarrow 0$.

Apibrėžimas. Funkcija $z = f(x, y)$ vadinama diferencijuojama taške $M_0(x_0, y_0)$ kai jos pilnąjį pokytį galima išreikšti formule $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$;

čia A, B – konstantos, α, β – nykstamos funkcijos, kai $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Teorema (Būtina funkcijos diferencijuojamumo sąlyga).

Jei funkcija $z = f(x, y)$ yra diferencijuojama taške $M_0(x_0, y_0)$, tai egzistuoja dalinės išvestinės $f'_x(M_0)$ ir $f'_y(M_0)$ ir $f'_x(M_0) = A, f'_y(M_0) = B$.

Apibrėžimas. Funkcijos $z = f(x, y)$ pilnuoju diferencialu vadiname reiškini

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Kadangi x ir y yra nepriklausomi kintamieji, tai $\Delta x = dx, \Delta y = dy$. Todėl

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Atsižvelgę į teoremą apie pilnąjį funkcijos pokytį

$$\left[\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \right],$$

Gauname $\Delta z = dz + o(\rho)$, čia $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Kai Δx ir Δy yra pakankamai maži, tai $\Delta z \approx dz$.

SVARBU!!!

Sudėtinių funkcijų diferencijavimas

Tarkime, kad srityje D apibrėžta funkcija $z = f(x, y)$, kurios argumentai yra $x = x(t), y = y(t)$. Rasime šios funkcijos pilnąją išvestinę $\frac{dz}{dt}$.

Teorema. Jei funkcija $z = f(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų x ir y atžvilgiu, o funkcijos $x = x(t), y = y(t)$ diferencijuojamos t atžvilgiu, tai

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Tarkime, kad srityje D apibrėžta funkcija $z = f(x, y)$, kurios argumentai yra $x = x(t, s), y = y(t, s)$. Kartu pareikalausime, kad, kintant t ir s , taškas $(x; y)$ priklausytų D .

Teorema. Jei funkcija $z = f(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų x ir y atžvilgiu, o funkcijos $x = x(t, s), y = y(t, s)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų t ir s atžvilgiu, tai

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Pavyzdžiai. 1) Rasti $\frac{dz}{dt}$, kai $z = \sin(x + y^2), x = 2 - e^{-t}, y = 2\cos(1 - t)$.

2) Rasti $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$, kai $z = xy, x = s^t, y = \frac{s}{t}$.

Neišreikštinių funkcijų diferencijavimas

Teorema. Tarkime, kad funkcija $F(x, y)$ ir jos dalinės išvestinės F'_x ir F'_y yra tolydžios taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinkoje; be to, $F(x_0, y_0) = 0$ ir $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Tada egzistuoja tokia taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinka, kurioje

lygtis $F(x, y) = 0$ turi vienintelį sprendinį $y = f(x)$, tenkinantį sąlygą $y_0 = f(x_0)$, o funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė yra tolydžios taško x_0 aplinkoje.

Taikydami šią teoremą, randama neišreikštinės funkcijos $F(x, y) = 0$ išvestinę (**SVARBU!!!**):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Pavyzdžiai. 1) Raskime funkcijos $y = x + \sin \frac{x}{y}$ išvestinę.

2) Raskite funkcijos $x^2y^2 - 2\cos(x - y) = 3$ išvestinę.

Teorema. Tarkime, kad funkcija $F(x, y, z)$ ir jos dalinės išvestinės F'_x, F'_y, F'_z yra tolydžios taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aplinkoje; be to, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ir $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Tuomet egzistuoja tokia taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aplinka, kurioje lygtis $F(x, y, z) = 0$ turi vienintelį sprendinį $z = \Phi(x, y)$, tenkinantį sąlygą $z_0 = \Phi(x_0, y_0)$, o funkcija z turi dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ taško M_0 aplinkoje.

Taikydami šią teoremą, randamos neišreikštinės funkcijos $F(x, y, z) = 0$ išvestinės (**SVARBU!!!**):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Pavyzdys. Funkcija $xz + x^3 + y^3 = ye^z$. Rasti $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Aukštesnių eilių dalinės išvestinės

Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ yra dviejų kintamųjų x ir y funkcijos, todėl jos taip pat gali turėti išvestines to paties argumento atžvilgiu. Jas žymėsime

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx} & \text{arba kito} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy} & & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx} \end{aligned}$$

Teiginys. Bet kokios dvi vienos eilės dalinės išvestinės, kurios skiriasi tik diferencijavimo tvarka ir yra tolydžios tam tikroje srityje D , yra tarpusavyje lygios toje srityje D : $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Pavyzdys. Tarkime duota funkcija $z = \ln(x^2 + y)$. Parodyti, kad $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Dviejų kintamųjų funkcijos lokalieji ekstremumai

Tarkime, kad funkcija $z = f(x, y)$ yra apibrėžta srityje D , o taškas $M_0(x_0, y_0)$ yra vidinis srities taškas.

Apibrėžimas. Taškas $M_0(x_0, y_0)$ vadinamas funkcijos $z = f(x, y)$ lokalojo minimumo (maksimumo) tašku srityje D , jei egzistuoja tokia taško M_0 aplinka $V_\delta(M_0)$, kad su visais $f(x, y) \in V_\delta(M_0) \cap D$ teisinga nelygybė

$$f_0(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (f_0(x_0, y_0) \geq f(x, y)).$$

Lokalioji minimumas ir maksimumas vadinami lokaliaisiais ekstremumais.

Teorema. Būtinios lokalojo ekstremumo sąlygos.

Jei funkcija $z = f(x, y)$ taške $M_0(x_0, y_0)$ turi lokalojį ekstremumą ir yra šiame taške diferencijuojama, tai

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{ir} \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$$

Apibrėžimas. Taškai kuriuose tenkinama lygčių sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

vadinami funkcijos $z = f(x, y)$ stacionariaisiais taškais.

Ne kiekvienas stacionarusis taškas yra lokalojo ekstremumo taškas!!!

Teorema. Pažymėkime

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2},$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Pakankamos lokalojo ekstremumo sąlygos.

Jei taškas $M_0(x_0, y_0)$ yra stacionarusis funkcijos $z = f(x, y)$ taškas ir

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$, tai taške M_0 funkcija turi lokalojį ekstremumą: maksimumą, kai $A < 0$, ir minimumą, kai $A > 0$;

2) $\Delta = AC - B^2 < 0$, tai taške M_0 lokalojo ekstremumo nėra.

Kai $\Delta = 0$ negalima nustatyti, ar yra lokalusis ekstremumas, ar ne.

Pavyzdys. Rasime funkcijos $z = 2x - x^2 - y^2 + 6y$ lokaliuosius ekstremumus.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

1. Užduotis. Raskite funkcijos dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = (x + \ln y)^5 - y \cdot \sin^2 x$;

b) $z = x \ln y - \frac{\sin^2 x}{y}$;

c) $z = \ln \frac{x}{y} + 2^{xy} + 3$;

2. Užduotis. Raskite $\frac{dz}{dt}$, kai $z = (3x^2 + 2y^3)$, $x = \ln t$, $y = \lg t$.

3. Užduotis. Raskite sudetinės funkcijos $z = (x^3 - y^2)^5$, $x = \cos \frac{u}{v}$, $y = e^{u+2v}$ dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

4. Užduotis. Raskite neišreikštinės funkcijos dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = x^2 y + z^2 x - z y^2$;

b) $\frac{x^2 \cdot y}{z} = \arctg \left(\frac{z}{x+y^2} \right)$.