

Matricos ir jų veiksmai.

Matrica vadinama skaičių lentelė ir žymima

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ arba } A = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

elementai a_{ij} vadinami matricos elementais; pirmasis indeksas i žymi eilutės, kurioje yra elementas numerį, o antrasis indeksas j – stulpelio numerį.

Kai matricoje A yra m eilučių ir n stulpelių, ji vadinama $[m \times n]$ formato matrica.

Matricos, kurios eilučių ir stulpelių skaičius yra vienodas (t.y. $m = n$), vadinama kvadratine n – osios eilės matrica.

Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sudaro pagrindinę įstrižainę, o jų suma $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ vadinama matricos A pėdsaku ir žymima SpA .

Elementai $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ sudaro antrąją įstrižainę, vadinamą šalutine įstrižaine.

Kvadratinė matrica vadinama ištrižainine, jeigu visi elementai $a_{ij} = 0$, kai $i \neq j$ ir $a_{ij} \neq 0$, kai $i = j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Kvadratinė n -tosios eilės matrica, kurios pagrindinės įstrižainės elementai yra **vienetai**, o visi kiti elementai – nuliai, vadinama **vienetine n -tosios eilės matrica** ir žymima E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Jeigu matricoje

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

visas jos eilutes sukeistume vietomis su tų pačių numerių stulpeliais, tai gautume matricą

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

vadinamą transponuota matricos A atžvilgiu.

Kvadratinė matrica, kurios elementai turi savybę $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, vadinama simetrine.

Kvadratinė matrica, kurios elementai turi savybę $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, vadinama antisimetrine.

Matrica, kurios visi elementai yra nuliai, vadinama nuline matrica ir žymima O .

Dvi vienodo formato matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ vadinamos lygiomis, kai jų atitinkami elementai yra lygūs, t.y. $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Veiksmi:

1. Sudėtis

Dviejų vienodo formato matricų $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ suma (skirtumu) vadinama matrica

$C = (c_{ij})$, kurios kiekvienas elementas yra matricų A ir B atitinkamų elementų suma (skirtumas). Taigi

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Daugyba iš skaičiaus.

Tarkime $\lambda \in R$. Jei dauginame matricą iš skaičiaus, tai kiekviena matricos elementą reikia padauginti iš to skaičiaus.

Pavyzdys. Atlikite veiksmus su matricomis A ir B : A^T , $A + B$, $A - B$, $-5B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T =$$

$$A + B =$$

$$A - B =$$

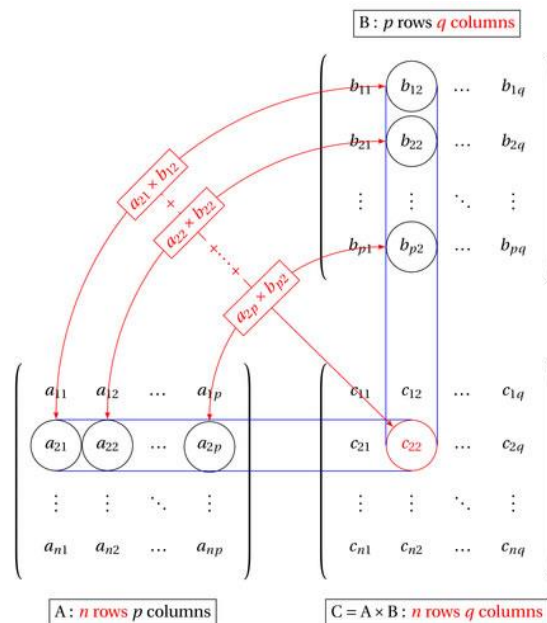
$$-5B =$$

3. Matricų daugyba.

Jei $A_{m \times s}$ ir $B_{s \times n}$, tai matricų A ir B sandauga vadinama matrica $C_{m \times n}$, kurios kiekvienas elementas apskaičiuojamas pagal formulę:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Pastaba. Sudauginti galima tik tas dvi matricas, kurių pirmosios stulpelių skaičius lygu antrosios eilučių skaičiui.



Pavyzdys.

Turime dvi matricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Raskime sandaugą $A \cdot B$.

Sprendimas.

Dabar pabandykime sudauginti matricas $B_{2 \times 3} \cdot A_{2 \times 2}$

Pirmosios matricos stulpelių skaičius yra 3, o antrosios matricos eilučių skaičius yra 2, taigi šie skaičiai nesutampa, matricas sudauginti negalima. Iš pateikto pavyzdžio matome, kad

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (matricų daugyba yra **nekomutatyvi**).

Tačiau yra ir tokios matricos, kurių sandauga $A \cdot B = B \cdot A$, tokios matricos vadinamos **komutuojančiomis**.

Pastaba. Komutuojančiomis gali būti tik kvadratinės matricos.

Determinantai ir jų savybės.

Determinantu vadinamas skaičius, kuris priskiriamas kvadratinei matricai pagal tam tikrą taisyklę.

Matricos determinantą žymėsime $\det A$, arba $|A|$, arba $|a_{ij}|$, $i, j = \overline{1, n}$.

Kai $n = 1$, tuomet matrica yra pirmos eilės ir $A = (a_{11})$ jos determinantas $|a_{11}| = a_{11}$.

Kai $n = 2$, tuomet matrica yra antros eilės ir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ jos determinantas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pavyzdys.

Trečios eilės determinanto apskaičiavimui yra patogi tokia schema (trikampių taisyklė):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Schemoje parodyta, kad trikampaiais sujungti elementai dauginami ir sandaugos imamos su pliuso ženklu, pirmuoju atveju, ir – su minuso ženklu antruoju atveju.

Pavyzdys. Apskaičiuokime trečiosios eilės determinantą.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Norėdami pereiti prie bet kurios eilės determinanto apskaičiavimo, turime žinoti minoro ir adjunkto sąvokas. Šias sąvoka išsiaiškinsime su trečiosios eilės determinanto pagalba.

Imkime determinanto elementą a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Išbraukime i -ąją eilutę ir j -ąją stulpelį. Iš likusių elementų sudarytas antrosios eilės determinantas vadinamas elemento a_{ij} **minoru** ir žymimas M_{ij} .

Pavyzdžiui, trečiosios eilės determinanto pirmojo stulpelio elementų minorai tokie:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Determinanto elemento a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, **adjunktu** vadinamas to elemento minoras M_{ij} , padaugintas iš $(-1)^{i+j}$ ir žymimas A_{ij} , t.y. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Nagrinėjamoju atveju, pirmojo stulpelio elementų adjunktai yra tokie:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ap. Determinanto reikšmė laikoma, bet kurios jo eilutės(stulpelio) elementu ir tos elementus atitinkančia adjunktų sandaugų suma.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1, n}$$

Pavyzdys. Apskaičiuokime trečiosios eilės determinantą skleidžiant adjunktais.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determinato savybės:

1. Matricos determinantas lygus jos transponuotos matricos determinantui.
2. Sukeitę dvi(du) gretimas determinato eilutes(stulpelius) vietomis, gausime determinantą, kuris skiriasi nuo to determinanto ženklu.
3. Jei determinanto kurios nors eilutės elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.
4. Determinantas, turintis dvi(du) proporcingas eilutes(stulpelius), lygus nuliui.
5. Determinantas, kurio visi eilutės elementai lygūs nuliui, lygus nuliui.
6. Jei determinanto kurios nors eilutės elementai yra dviejų dėmenų sumos, tai tas determinantas lygus sumai dviejų determinuotų, kurių viename minėtąją eilutę sudaro pirmieji dėmenys, kitame – antrieji dėmenys, o likusios eilutės visuose trijuose determinantuose vienodos.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

7. Determinantas, kurio visi eilutės elementai lygūs nuliui, lygus nuliui.
8. Jei prie bet kurios determinanto eilutės elementų pridėsime atitinkamus kitos eilutės elementus, padaugintus iš realiojo skaičiaus, determinanto reikšmė nepasikeis.

Atvirkštinė matrica.

Apibrėžimas. Atvirkštine kvadratinės matricos A matrica vadinama matrica A^{-1} , tenkinanti lygybes $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Atvirkštinė matrica išreiškiama taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

čia A_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, yra matricos A elementų a_{ij} adjunktai.

Kvadratinė n -osios eilės matrica A vadinama reguliariąja, jei matricos A determinantas $|A| \neq 0$ ir singuliariąja priešingu atveju.

Matrica A turi atvirkštinę matricą tada ir tik tada, kai ji reguliari.