

Vektoriai

Priminimai.

Atkarpa, turinti ilgį ir kryptį vadinama **vektoriumi**. Atstumas nuo vektoriaus pradžios iki galo vadinamas vektoriaus ilgiu arba modulių ir žymimas: $|\overrightarrow{AB}|$ arba $|\vec{a}|$.

Apibrėžimas. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami kolineariais, jeigu jie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse. Vektorių kolinearumo sąlyga:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Apibrėžimas. Trys nenuliniai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ vadinami komplanariais, jeigu jie yra vienoje plokštumoje arba lygiagrečiose plokštumose.

Apibrėžimas. Du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami lygiais, jeigu jų moduliai yra lygūs, jie kolinearūs ir jų kryptys sutampa. Rašysime $\vec{a} = \vec{b}$.

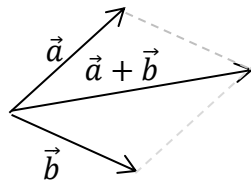
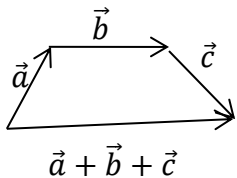
Apibrėžimas. Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus λ sandauga yra vektorius $\vec{b}$, kurio kryptis sutampa su $\vec{a}$ kryptimi, jei λ teigiamas ir yra priešinga $\vec{a}$ kryptčiai, jei λ neigiamas. Žymima: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Vektoriaus $\vec{b}$ ilgis lygus vektoriaus $\vec{a}$ ilgiui, padaugintam iš skaičiaus λ modulio, t.y. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Išvada: Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai jie susieti lygybe $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

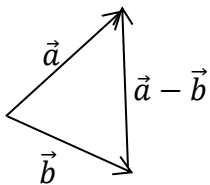
Apibrėžimas. Vektorius, kurio ilgis lygus 1, vadinamas vienetiniu vektoriumi. Žymėsime $\vec{a}^0$: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

Sudėtis:



Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma vadinamas vektorius $\vec{c}$, kuris jungia laužtės, sudarytos iš šių dviejų vektorių, pirmojo dėmens pradžią su paskutiniojo dėmens galu.

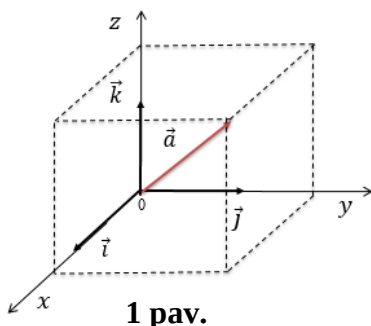
Atimtis:



Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vadinamas vektorius $\vec{c}$, kurį pridėjus prie vektoriaus $\vec{b}$, gaunamas vektorius $\vec{a}$.

Vektoriaus koordinatės Dekarto sistemoje.

Tris viena kitai statmenos ašis Ox, Oy, Oz (**1 pav.**) nubrėžtos per tašką O, sudaro stačiakampę **Dekarto koordinačių sistemą**. Ašyse Ox, Oy, Oz atidėkime vienetinius vektorius, kuriuos atitinkamai pažymėsime $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$.



1 pav.

Vektorių $\vec{a}$ perkeltume taip, kad jo pradžia sutaptų su koordinačių pradžios tašku O. Tuomet vektorių $\vec{a}$ galime užrašyti $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Dydžiai a_x , a_y , a_z vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis. Trumpiau vektoriaus koordinatės a_x , a_y , a_z nurodomos taip: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

$$a_x = pr_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = pr_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = pr_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Vektoriaus ilgis:

Sakykime turime taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$, tai $\overrightarrow{M_1 M_2} =$

$$\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Apibrėžimas. Vektoriaus $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ kampų α, β, γ su koordinačių ašimis Ox, Oy, Oz kosinusai vadinami **vektoriaus krypties kosinusais**.

Krypties kosinusų savybė: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Vienetinis vektorius: $\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

Apibrėžimas. Kampu tarp dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinamas mažiausias kampas tarp šiems vektoriams atitinkamai lygių vektorių, atidėtų iš vieno taško.

Kampas žymimas $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus šių vektorių modulių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandaugai:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Bet kuriems nenuliniams vektoriams $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir skaičiui λ teisingos savybės:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ arba $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

Paaškinimas (Apibrėžimas: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutatyvumo dėsnis)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributyvumo dėsnis)
- $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$
- Jei vektorius $\vec{a} \perp \vec{b}$, tai $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ← Labai SVARBU**

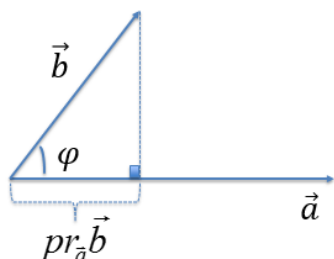
Jei yra žinomos vektorių koordinatės stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje:

$$\text{t.y. } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\text{Tada } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\text{Tada } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Skaliarinės sandaugos taikymai:



2 pav.

- Vieno vektoriaus projekcija į kitą (2 pav.).

$$\cos \varphi = \frac{pr_{\vec{a}} \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ iš stataus trikampio.}$$

$$\text{Tada } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{pr_{\vec{a}} \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}^0.$$

- Kampas tarp vektorių:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- Apskaičiuojant darbą A , kurį atlieka jėga $\vec{F}$, veikdama materialųjį tašką kol jis nueina tiesės atkarpa kelią $|\vec{s}|$:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

čia φ – kampas tarp jėgos ir kelio krypties. Vadinasi, darbas lygus kūną veikiančios jėgos ir to kūno poslinkio vektoriaus skaliarinei sandaugai.

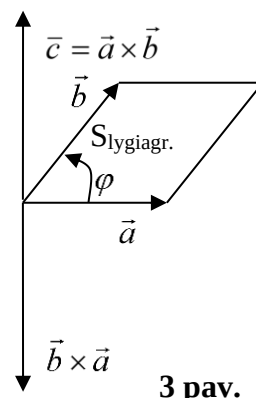
Vektorinė dviejų vektorių sandauga.

Tarkime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji vektoriai. Jų sudaromą kampą pažymėkime

$$\varphi (0 < \varphi < \pi).$$

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorine sandauga $\vec{a} \times \vec{b}$ vadiname vektorių $\vec{c}$ (3pav.), tenkinantį tris sąlygas:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, taigi $\vec{c}$ statmenas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ plokštumai;
- vektoriaus $\vec{c}$ ilgis lygus lygiagretainio, kurio dvi gretimos kraštinės sutampa su vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, plotui, t.y. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{lyg} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$;
- vektorius $\vec{c}$ nukreiptas taip, kad, žiūrint iš jo galo, atrodytų, jog vektorius $\vec{a}$, pasuktas mažiausiu kampu φ prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, sutampa su vektoriaus $\vec{b}$ kryptimi.



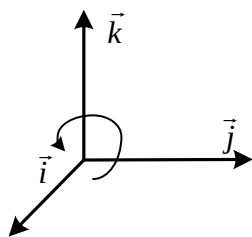
3 pav.

Savybės:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
- $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$,
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ arba $\vec{a} = \vec{0}$ arba $\vec{b} = \vec{0}$.

Pavyzdys. Sudauginkime $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) =$

Remdamiesi vektorinės sandaugos apibrėžimu, sudarykite vektorių $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ vektorinių sandaugų lentelę.



	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Įsidėmėti šią lentelę padės schema, pavaizduota paveiksle. Jei trumpiausiu keliu nuo pirmojo iki antrojo vektoriaus einama priešinga laikrodžio rodyklės kryptimi, tai sandauga lygi trečiajam vektoriui, o jei laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, tai trečiasis vektorius imamas su minuso ženklu.

SVARBU!!! Dvieju vektorių vektorinės sandaugos apskaičiavimo formulės išvedimas:

Jei yra žinomos vektorių koordinatės stačiakampėje Dekarto koordinatinių sistemoje:

$$\text{t.y. } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

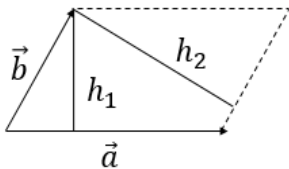
Tada

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + \\ &+ a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = a_x b_x \vec{0} + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_y \vec{0} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + \\ &+ a_z b_z \vec{0} = a_y b_z \vec{i} - a_z b_y \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_x b_z \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Geometrijoje vektorinė vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sandauga taikoma apskaičiuojant lygiagretainio bei trikampio, kurių kraštinės sutampa su šiais vektoriais, plotus:

Pavyzdys. Duoti vektoriai $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$ ir $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$. Rasti $\vec{a} \times \vec{b}$.

- Lygiagretainio plotas:

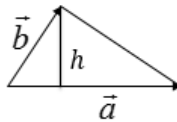


$$S_{lyg} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$h_1 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|},$$

$$h_2 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

- Trikampio plotas:



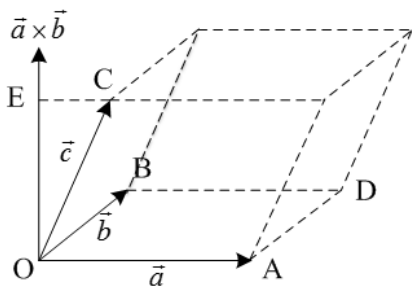
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad h = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Mišrioji trijų vektorių sandauga

Apibrėžimas. Trijų vektorių mišriąją sandaugą vadinamas skaičius, gautas vektorinę sandaugą $\vec{a} \times \vec{b}$ skalariškai padauginus iš vektoriaus $\vec{c}$. Žymima: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

SVARBU!!!! Trijų vektorių mišrioji sandauga: geometrinė prasmė (įrodymas):

Tarkime, kad vektoriai $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ yra nekomplanarūs. Sudarykime iš jų gretasienį.



Gretasienio tūris lygus: $V = S_{OADB} \cdot OE$;

Tuo tarpu pagrindo plotas: $S_{OADB} = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Gretasienio aukštinės OE ilgis yra lygus vektoriaus $\vec{c}$ projekcijai į vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$, t.y. $OE = pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$.

Tai

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Skaliarinė sandauga tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ gali įgyti tiek neigiamą, tiek teigiamą reikšmę. Kadangi tūris matuojamas teigiamais vienetais, tai $V_{gret} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Piramidės tūris: $V_{\Delta pir} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Trijų vektorių $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarumo sąlyga: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Mišriosios sandaugos savybės

Bet kuriems nenuliniamis vektoriams $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ teisingos savybės:

- Būtina ir pakankama trijų vektorių **komplanarumo sąlyga**:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \leftarrow \text{SVARBU!!!!}$$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ kai kampas tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ smailus.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ kai kampas tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ bukas.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$.

SVARBU!!!! Trijų vektorių mišrioji sandauga: apskaičiavimo formulės išvedimas:

Tarkime, kad stačiakampėje koordinatinių sistemoje duoti trys vektoriai $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

Iš vektorinės sandaugos žinome, kad

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Daugindami vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ skalariškai iš $\vec{c}$, gauname:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$