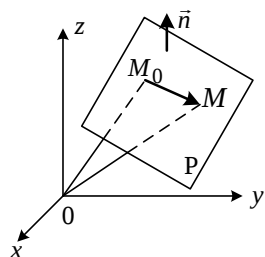


Plokštuma erdvėje

SVARBU!!! Bendrosios plokštumos lygties išvedimas:



Plokštumos padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu yra visiškai nusakyta, kai žinomas:

- jos taškas $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- ir jai statmenas vektorius $\vec{n} = (A, B, C)$ – **plokštumos normalusis vektorius**.

Imkime bet kurį kitą plokštumos tašką $M(x, y, z)$. Kadangi $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, iš dviejų vektorių statmenumo sąlygos gauname **vektorinę plokštumos lygtį**: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Irašę vektorių koordinates ir sudauginę jas skaliariškai, gauname

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Atskliaudę skliaustus ir pažymėję $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$,

gauname **bendrąją plokštumos lygtį**:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Pastaba. Ši lygtis turi be galo daug sprendinių (t.y., plokštumai priklauso be galo daug taškų). Kokio kintamojo lygtyje nėra, tokiai ašiai plokštuma yra lygiagreti. Jei $D = 0$ – eina per koordinačių pradžią. Jei nėra dviejų kintamųjų, tai lygiagreti atitinkamai plokštumai.

Pavyzdys. Plokštuma eina per tašką $M_0(1; 0; 3)$ ir yra statmena vektoriui $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Užrašykite plokštumos lygtį.

Kampas tarp dviejų plokštumų: $\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Kai plokštumos statmenos, tai $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ arba $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

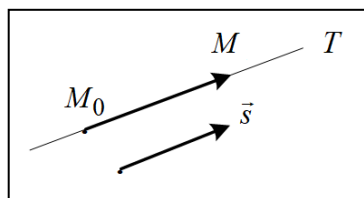
Kai plokštumos lygiagrečios, tai $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ arba $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$.

Taško M_0 atstumas iki plokštumos:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Tiesė erdvėje

SVARBU!!! Kanoninių ir parametrinių tiesės lygčių išvedimas:



Tiesė erdvėje galima nusakyti, kai yra žinomas:

- jos taškas $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- ir jai lygiagretus vektorius $\vec{s} = (l, m, n)$ – tiesės krypties vektorius.

Imkime bet kurį tiesės tašką $M(x, y, z)$. Kadangi $\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M}$, tai $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, čia $t \in \mathbb{R}$ – parametras. Tai **vektorinė tiesės lygtis**.

Užrašę lygtį $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ koordinatėmis, gauname **tiesės erdvėje parametrines lygtis**:

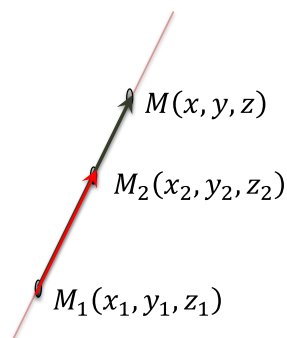
$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad \text{Iš} \quad \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \quad \text{lygybės išreiškę parametą } t \text{ ir sulyginę gautųjų}$$

lygybių dešiniąsias puses, gauname **kanonines tiesės lygtis**: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Jas galima gauti ir iš vektorių $\overrightarrow{M_0M}$ ir $\vec{s}$ kolinearumo sąlygos.

Pastaba. Kanoninė lygtis turi prasmę ir tuo atveju, kai kuri nors iš krypties vektoriaus koordinačių lygi nuliui.

Pavyzdys. Raskite tiesės lygtį, kuri eina per tašką $M_0(1; 2; 3)$ ir yra statmena plokštumai $2x - 3y + z + 2 = 0$.

SVARBU!!! Tiesės, einančios per du taškus lygties išvedimas:

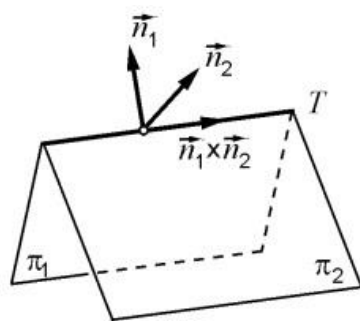


Duota: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ bei $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – taškai esantys tiesėje.

$M(x, y, z)$ – pasirenkame bet kurį tašką, priklausantį tiesei. Sudarome vektorius:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1); \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Kadangi $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, tai $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.



Bendrosios tiesės erdvėje lygtys

Plokštumos susikerta ir sudaro tiesę. Jau žinome, kad užrašyti tiesės lygtį, reikia turėti $\vec{s}$ ir tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Iš šių plokštumos lygčių žinome, kad $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ ir $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$.

Tai tiesės $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Kaip rasti tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$? Pasirenkame

pavyzdžiui $z_0 = 0$, tai $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow (x_0, y_0)$, taigi $M_0(x_0, y_0, 0) \in T$

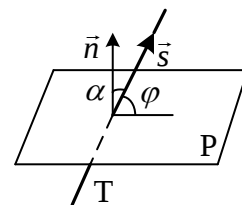
Kai surandame $\vec{s}$ ir tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$, tada tiesės lygtis užrašome kanoniniu pavidalu.

Kampas tarp dviejų teisių: $\varphi = (\vec{T}_1, \vec{T}_2)$, tai $\varphi = (\vec{s}_1, \vec{s}_2)$, $\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

Jei tiesės statmenos, tai $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$: $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Jei tiesės lygiagrečios, tai $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Kampas tarp tiesės ir plokštumos: $\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$



SVARBU!!!!

Kai $T \parallel P$, tai $\vec{n} \perp \vec{s}$, todėl $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$. Taigi tiesės ir plokštumos **lygiagretumo sąlyga**: $Al + Bm + Cn = 0$.

Kai $T \perp P$, tai $\vec{n} \parallel \vec{s}$, todėl jų koordinatės yra proporcingos. Tai tiesės ir plokštumos **statmenumo sąlyga**:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Pavyzdys. Su kokiais parametru A ir n reikšmėmis tiesė $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{n}$ yra statmena plokštumai $Ax + 2y - 6z + 1 = 0$.