

Antros eilės kreivės

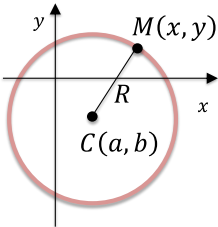
Antros eilės kreivėmis vadinamos kreivės, kurių lygtys yra antrojo laipsnio kintamųjų x ir y atžvilgiu.

Bendras antrojo laipsnio lygties x ir y atžvilgiu pavidalas yra: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Nagrinėsime atvejį, kai $B = 0$. Tuomet jei:

- 1) $A \cdot C > 0$, tai ši lygtis reiškia elipsę;
- 2) $A \cdot C < 0$, tai ši lygtis reiškia hiperbolę;
- 3) $A = 0$ (arba $C = 0$), tai ši lygtis reiškia parabolę;
- 4) $AC > 0$ ir $A = C$, tai gauname atskirą elipsės atvejį – apskritimą.

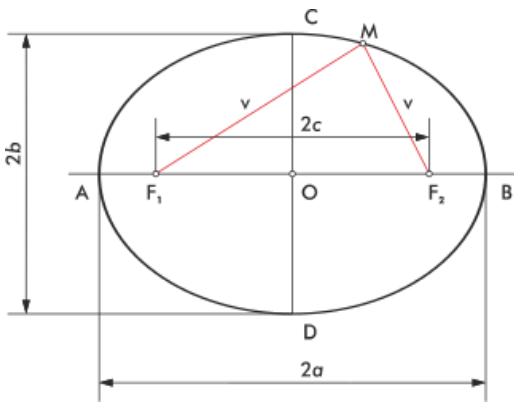
Apskritimas:



Apibrėžimas. Apskritimu vadinama aibė plokštumos taškų, kurių kiekvienas vienodai nutolęs nuo pastovaus taško. Pastovus taškas vadinamas **apskritimo centru**, o apskritimo taško atstumas iki centro – **spinduliu**.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Elipsė:



Apibrėžimas. Elipse vadinama aibė plokštumos taškų, kai kiekvieno taško atstumų iki dviejų pastovių taškų suma yra pastovus dydis, lygus $2a$ ($|F_1M| + |F_2M| = 2a$). Pastovius taškus F_1 ir F_2 vadiname elipsės **židiniais**.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2c$ – atstumas tarp židinių

$2a$ – didžioji ašis

$2b$ – mažoji ašis

ryšys tarp parametrų $c^2 = a^2 - b^2$.

Elipsės ištęstumą apibūdina

ekscentricitetas $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 < \varepsilon < 1$). Kai $\varepsilon = 0$, gauname apskritimą.

Kai $\varepsilon = 1$, gauname atkarpą, sutampančią su didžiąja ašimi.

Pastaba.

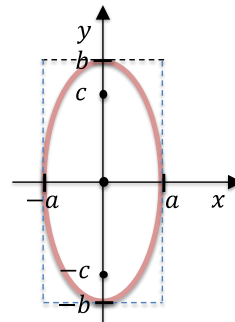
Jei elipsės kanoninėje lygtyje

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$b > a$,

tai elipsės židiniai yra **Oy** ašyje,

be to $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ir $c^2 = b^2 - a^2$.



Pavyzdys. Parašykite elipsės, kurios židiniai yra Ox ašyje, kanoninę lygtį, jei jos mažoji ašis lygi 10, o ekscentricitetas lygus $\frac{12}{13}$.

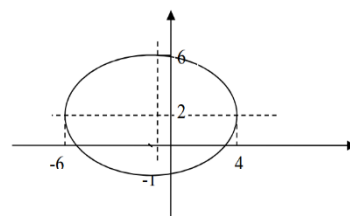
Pavyzdys. Kokią antros eilės kreivę apibūdina ši lygtis $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$? Raskite šios kreivės židinius.

Kai elipsės centras yra taške $(x_c; y_c)$:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} =$$

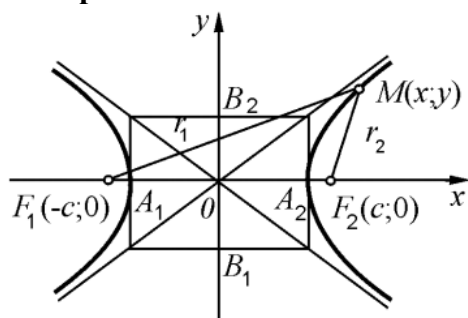
Pavyzdys.

$$\frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$



Pavyzdys. Užrašykite kreivę $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ kanoniniu pavidalu.

Hiperbolė:



Apibrėžimas. Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų, kai kiekvieno taško atstumų iki dviejų pastovių taškų skirtumas yra pastovus dydis, lygus $\pm 2a$ ($|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$). Pastovūs taškai F_1 ir F_2 vadinami hiperbolės **židiniais**.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2a$ – realioji ašis

$2b$ – menamoji ašis

ryšys tarp parametrų $c^2 = a^2 + b^2$.

Tiesės $y = \pm \frac{b}{a}x$ – vadinamos hiperbolės **asimptotėmis**.

Hiperbolės ištęstumą apibūdina **ekscentricitetas** $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Kai hiperbolės centras yra taške $(x_c; y_c)$:

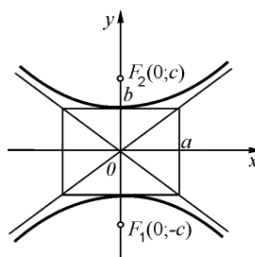
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

Pastaba. Hiperbolės

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

židiniai yra Oy ašyje.

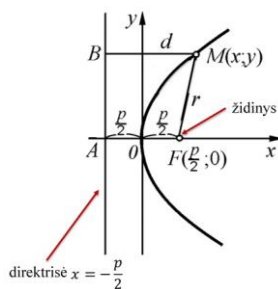
$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \right)$$



Pavyzdys. Parašykite hiperbolės, kurios židiniai yra Ox ašyje, kanoninę lygtį, jei atstumas tarp židinių lygus 6, o ekscentricitetas lygus $\frac{3}{2}$.

Pavyzdys. Kokią antros eilės kreivę apibūdina ši lygtis $-4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$? Raskite šios kreivės židinius.

Parabolė:



Apibrėžimas. Parabole vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško ir duotosios tiesės. Duotasis taškas F vadinamas **židiniu**, o duotoji tiesė – **direktrise**.

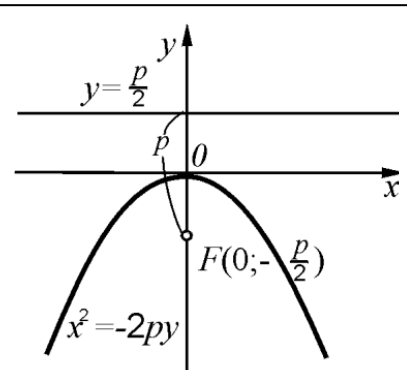
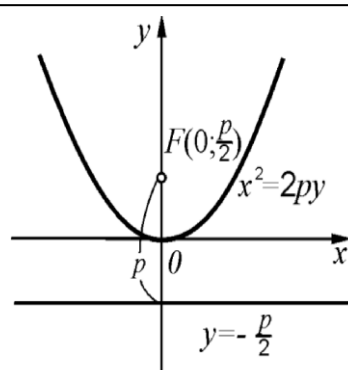
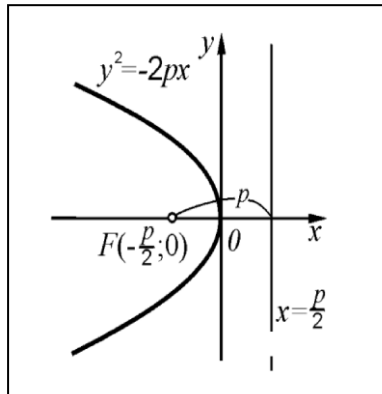
$$y^2 = 2px$$

$p > 0$ – parabolės parametras,

Ox – parabolės ašis,

$O(0,0)$ – parabolės viršūnė,

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – židiny.



Pavyzdys. Raskite parabolės $y^2 = 12x$ židinį ir direktrės lygtį.

Pavyzdys. Užrašykite kreivę $y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ kanoniniu pavidalu ir ją nubrėžkite.

Santrauka:

Kreivė	Apibrėžimas	Lygtis	Parametrai
Apskritimas	$d_c = R = \text{const}$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	$C(a, b), R$
Elipsė	$d_{F_1} + d_{F_2} = 2a = \text{const}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a^2 = b^2 + c^2,$ $F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$ $\varepsilon = \frac{c}{a}$
Hiperbolė	$d_{F_1} - d_{F_2} = \pm 2a = \text{const}$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2,$ asimptotės: $y = \pm \frac{b}{a} x$
Parabolė	$d_F = d_T$	$y^2 = 2px$ (simetriška Ox ašiai)	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right),$ direktrisė: $x = -\frac{p}{2}$