

Funkcijos sąvoka

Jeigu kiekvieną kintamojo x reikšmę iš srities D atitinka tik viena reikšmė y iš srities E , tai y yra kintamojo x funkcija. x vadinamas **nepriklausomu kintamuoju** arba **argumentu**; aibė D vadinama **funkcijos apibrėžimo sritimi**; aibė E – **reikšmių sritimi**. Poaibio D elementus žymėsime x , poaibio E – raide y .

Tada funkciją galime užrašyti taip: $y = f(x)$.

Kai funkcija nusakoma formule, kurioje nurodyta, kokius veiksmus reikia atlikti su kintamojo x reikšme, norint rasti y reikšmę, tai toks funkcijos reiškimo būdas vadinamas **analiziniu**.

Pagrindinės elementariosios funkcijos:

- Laipsninė yra funkcija $y = x^a$, čia $a \in R$;
- Rodiklinė yra $y = a^x$, čia $a > 0$, $a \neq 1$;
- Logaritinė yra funkcija $y = \log_a x$, čia $a > 0$, $a \neq 1$;
- Trigonometrinės funkcijos yra $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- Atvirkštinės trigonometrinės funkcijos yra $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$;

Nagrinėkime funkciją $y = f(u)$ kurios argumentas u yra kintamojo x funkcija: $u = g(x)$. Įrašę į lygybę $y = f(u)$ vietoj u turimą funkciją, gauname $y = f(g(x))$. Tokia funkcija vadinama **sudėtine funkcija**.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama **išreikštine**, kadangi kintamasis y yra išreikštas kintamuoju x .

Pavyzdys: $y = x^2 + 2x + 5$ arba $y = \sin 2x$.

Dabar tarkime, kad kintamieji x ir y susieti lygtimi $F(x, y) = 0$, o kiekvieną x reikšmę iš intervalo (a, b) atitinka viena y reikšmė, nustatoma iš tos lygties. Tuomet kintamąjį y galima laikyti kintamojo x funkcija, apibrėžta intervale (a, b) . Tokiu atveju funkcija $F(x, y) = 0$ vadinama **neišreikštine**.

Pavyzdys: $\sin(xy) = x^2 + xy$.

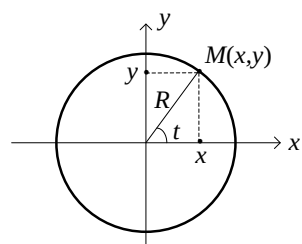
Parametrinės kreivių lygtys

Tarkime, turime dvi kintamojo t funkcijas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Kiekvieną t reikšmę atitinka po vieną x ir y reikšmę. Jei porą (x, y) traktuojame kaip plokštumos xOy tašką, tai kiekvieną t reikšmę atitinka vienas plokštumos taškas. Kai t reikšmės kinta nuo t_1 iki t_2 plokštumos taškas nubrėžia tam tikrą kreivę. Šios lygtys vadinamos parametrinėmis kreivės lygtimis, o t – parametru.

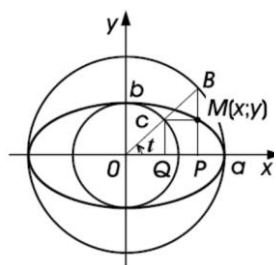
Jei iš pirmosios lygties galima išreikšti parametą t : $t = \Phi(x)$, tai įrašę jo išraišką į antrąją lygtį, gauname $y = \psi(\Phi(x))$. Taigi, šios lygtys apibrėžia y kaip kintamojo x funkciją, todėl sakoma, kad ši funkcija apibrėžta parametriškai.



Apskritimas.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



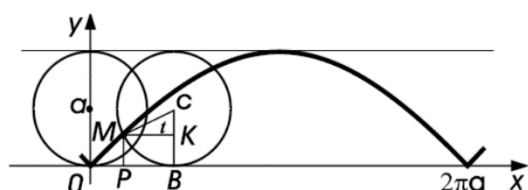
Elipsė.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tegul $x = a \cos t$, $y = b \sin t$

Tada

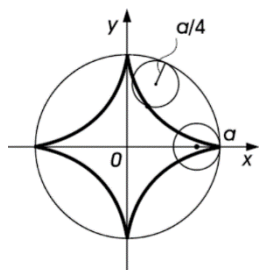
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Cikloidė. Cikloide vadinama kreivė, kurią brėžia apskritimo taškas, kai tas apskritimas neslysdamas rieda tiese.

Cikloidės parametrinės lygtys:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

Kai $t \in [0; 2\pi]$ gauname pirmąją arką.



Astroidė. Astroide vadinama kreivė, kurią brėžia neslysdamo riedančio apskritimo su spinduliu $a/4$ taškas, kai tas apskritimas yra kito apskritimo su spinduliu a viduje.

Astroidės parametrinės lygtys:
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$

Racionaliosios funkcijos

Racionaliąją trupmeną vadinamas dviejų daugianarių santykis:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

čia $P(x)$ ir $Q(x)$ – daugianariai, neturintys bendrų šaknų. Racionalioji trupmena gali būti taisyklinga ($n < m$) ir netaisyklinga ($n \geq m$). Jeigu trupmena netaisyklinga, tai galima išskirti sveikąją dalį (padalinus skaitiklį iš vardiklio) ir išreikšti ją daugianario ir taisyklingos racionaliosios trupmenos suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Jei turim taisyklingą trupmeną, tai tikslas yra racionaliąją trupmeną $\frac{P(x)}{Q(x)}$ išreikšti paprasčiausių trupmenų suma.

PVZ:
$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}.$$

Trupmenos vardiklio daugianario $Q(x)$ šaknis gali būti realios skirtingos, kai kurios realios kartotinės, jungtinės kompleksinės skirtingos ir jungtinės kompleksinės kartotinės.

Tuomet

1. Jei šaknis realios ir skirtingos:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{C}{x - x_m}$$

2. Jei šaknis realios ir sutampa:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^m} + \frac{B}{(x - x_1)^{m-1}} + \dots + \frac{C}{x - x_1}$$

3. Jeigu šaknis kompleksinės ir skirtingos:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

4. Jeigu šaknis kompleksinės ir sutampa:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{x^2 + px + q}$$

čia $A, B, C, M, N, \dots$ yra nežinomi koeficientai.

Pavyzdys. Išreikšti trupmeną $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ paprasčiausių trupmenų suma.