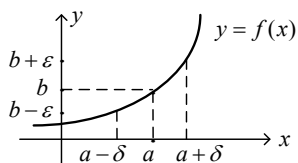


Funkcijų ribų skaičiavimas.



Apibrėžimas. Skaičius b vadinamas **funkcijos f riba taške a** , jei bet kurį $\varepsilon > 0$ atitinka tokia taško a aplinka δ , kad su visais x iš šios aplinkos, atitinkamos funkcijos reikšmės patenka į taško b aplinką ε .

Žymėsime $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Geometrinė funkcijos ribos prasmė:

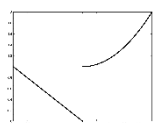
Matome, kad δ priklauso nuo pasirinkto ε . Mažinant ε , mažėja ir δ . Jei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, tai iš to, kad x priklauso taško a δ – aplinkai, išplaukia, kad $y = f(x)$ priklauso taško b ε -aplinkai.

Apibrėžimas. Jei ieškant funkcijos ribos, kai $x \rightarrow a$, apsiribojama tik x reikšmėmis, tokiomis, kad $x < a$, tai tokia riba vadinama funkcijos **riba iš kairės** ir žymima $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$.

Apibrėžimas. Jei ieškant funkcijos ribos, kai $x \rightarrow a$, apsiribojama tik x reikšmėmis, tokiomis, kad $x > a$, tai tokia riba vadinama funkcijos **riba iš dešinės** ir žymima $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$.

Apibrėžimas. Šios ribos vadinamos funkcijos vienusėmis ribomis. Kai $b_1 = b_2$, sakoma, kad funkcija f turi ribą taške a , kai $b_1 \neq b_2$ – funkcija f taške a ribos neturi.

Pavyzdys. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kai } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$ Rasime funkcijos $f(x)$ vienuses ribas taške $x = 0$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-0} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Kadangi $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, funkcija $f(x)$ taške $x = 0$ ribos neturi.

Funkcijos riba, kai $x \rightarrow \infty$

Imkime pavyzdį $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Akivaizdu, kad kuo didesnis x tuo reikšiny $\left|\frac{1}{x}\right|$ mažėja. Taigi, kai x reikšmės didelės, funkcijos reikšmės mažai skiriasi nuo 3. Sakoma, kad funkcijos riba lygi 3, kai $x \rightarrow \infty$ ir rašoma

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$. Bendru atveju žymima $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Be to, užrašas $x \rightarrow \infty$ turi būti suprantamas kaip $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$. Jei $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$ ribos nesutampa, tai jos nagrinėjamos atskirai.

Funkcijos f riba taške a yra **begalybė**, jei yra taško a aplinka, kurios visuose taškuose teisinga nelygybė $|f(x)| > M$, koks didelis teigiamas skaičius M bebūtų.

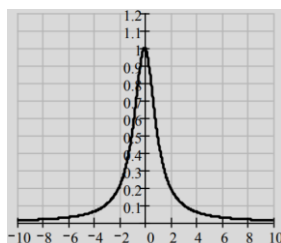
Pavyzdys. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = x$ riba, kai $x \rightarrow \infty$. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$.

Apibrėžimas. Funkcijos, kurių ribos, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$ lygios begalybei, vadinamos neapibrėžtai didėjančiomis.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama apibrėžta tam tikrame intervale, jeigu egzistuoja toks $M > 0$, kad su visomis x reikšmėmis iš duotojo intervalo teisinga nelygybė $|f(x)| \leq M$.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama apibrėžta, kai $x \rightarrow a$, jei egzistuoja tokia taško a aplinka $(a - \delta) \cup (a + \delta)$, kurioje ta funkcija yra apibrėžta.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama apibrėžta, kai $x \rightarrow \infty$, jei egzistuoja toks skaičius $N > 0$, kad su visais $|x| > N$ funkcija f yra apibrėžta.

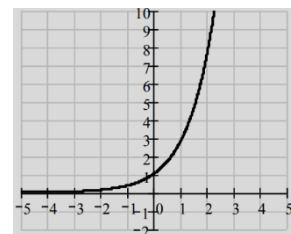


Pavyzdys. 1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ – apibrėžta visur

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+(-0)^2} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+(+0)^2} = 1;$$

2. $f(x) = e^x$ apibrėžta iš apačios, kai $x \rightarrow -\infty$ ir yra neapibrėžtai didėjanti, kai $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\infty} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty = +\infty$$



Bet kuri neapibrėžtai didėjanti funkcija yra neapibrėžta.

!!!Tačiau jei funkcija yra neapibrėžta, tai dar nereiškia, kad ji yra neapibrėžtai didėjanti!!!

Nykstamoji funkcija ir jos savybės

Apibrėžimas. Funkcija $\alpha(x)$ vadinama **nykstamoja**, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$, jeigu jos riba lygi nuliui.

Teorema. Funkcija $f(x)$ taške $x = a$ turi **baigtinę ribą b** tada ir tik tada, kai ji išreiškiama suma $b + \alpha(x)$, kurioje $\alpha(x)$ yra nykstamoji funkcija, kai $x \rightarrow a$.

1 savybė. Baigtinio skaičiaus nykstanųjų funkcijų suma yra nykstamoji funkcija.

2 savybė. Aprėžtosios ir nykstančiosios funkcijų sandauga yra nykstamoji funkcija.

3 savybė. Dviejų nykstančių funkcijų sandauga yra nykstamoji funkcija.

4 savybė. Konstantos ir nykstančiosios funkcijos sandauga yra nykstamoji funkcija.

5 savybė. Jei funkcija $f(x)$ yra neaprėžtai didėjanti, kai $x \rightarrow a$ tai funkcija

$$\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$$

yra nykstamoji, kai $x \rightarrow a$.

6 savybė. Jei funkcija $\alpha(x)$ yra nykstamoji, kai $x \rightarrow a$ tai funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

yra neaprėžtai didėjanti, kai $x \rightarrow a$.

Šios savybės įteisina tokius simbolinius užrašus, naudojamus skaičiuojant ribas:

$$\begin{array}{l} \frac{C}{+0} = +\infty \quad \frac{C}{-0} = -\infty \quad \frac{C}{0} = \infty \\ \frac{C}{+\infty} = +0 \quad \frac{C}{-\infty} = -0 \quad \frac{C}{\infty} = 0 \end{array}$$

Teorema. Monotoniškai didėjanti (mažėjanti) ir aprėžtoji iš viršaus (iš apačios) aibėje X funkcija turi baigtinę ribą, kai $x \rightarrow a, a \in X$.

Teorema. (Tarpinės funkcijos ribos teorema) Jei funkcijos tenkina sąlygą $u(x) \leq z(x) \leq v(x) \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ ir $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$, tai $\lim_{x \rightarrow a} z(x) = b$.

Teorema. Jei funkcijos f ir g turi baigtines ribas $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, A, B \in R$, tai:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$;
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$

Neapibrėžtieji reiškiniai

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Nykstanųjų funkcijų palyginimas

Tarkime, kad $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ yra nykstančiosios funkcijos, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$.

Apibrėžimas. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$, tai $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ vadinamos tos pačios eilės nykstančiosiomis funkcijomis, kai $x \rightarrow a$.

Pavyzdys. Kai $x \rightarrow 0, \alpha(x) = 2x^3, \beta(x) = 5x^3$ yra tos pačios eilės nykstančiosios funkcijos, nes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{5x^3} = \frac{2}{5} \neq 0$$

Apibrėžimas. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, tai $\alpha(x)$ vadinama aukštesnės eilės negu $\beta(x)$ nykstančiąja funkcija, kai $x \rightarrow a$.

Žymėsime $\alpha(x) = o(\beta(x)), x \rightarrow a$.

Pavyzdys. Kai $x \rightarrow \infty, \alpha(x) = \frac{1}{1+x^2}, \beta(x) = \frac{3}{1+x}$ yra nykstančiosios funkcijos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

Taigi $\frac{1}{1+x^2} = o\left(\frac{3}{1+x}\right)$, kai $x \rightarrow \infty$.

Apibrėžimas. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, tai $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ vadinamos ekvivalenčiomis nykstančiosiomis funkcijomis.

Žymėsime $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow a$

Ekvivalenčių funkcijų pavyzdžiai: 1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$; 2) $\sin kx \sim kx, x \rightarrow 0$; 3) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$;

4) $\operatorname{tg} kx \sim kx, x \rightarrow 0$; 5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$; 6) $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$; 7) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$;

8) $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$; 9) $e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$.