

SVARBU!!! Funkcijos tolydumo 3 apibrėžimai:

Apibrėžimas(1). Funkcija $f: X \rightarrow Y$ vadinama **tolydžia taške** $x_0 \in X$, jeigu ji apibrėžta šiame taške ir jo aplinkoje, ir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Taikydami ribos apibrėžimą, galime sakyti, kad f yra tolydi taške x_0 , jei $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pažymėkime:

$\Delta x = x - x_0$ – argumento pokytis,

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – funkcijos pokytis.

Jei funkcija $f(x)$ yra tolydi, tai iš tolydumo apibrėžimo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

arba $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, nes kai $x \rightarrow x_0$, tai $\Delta x \rightarrow 0$.

Apibrėžimas(2). Funkcija f vadinama **tolydžia taške** x_0 , jei nykstamą argumento pokytį atitinka nykstamas funkcijos pokytis.

Pastaba. Jei funkcija yra tolydi, tai ribos ir funkcijos simbolius galima sukeisti vietomis.

Apibrėžimas(3). Funkcija f vadinama **tolydžia iš kairės taške** x_0 , jei $f(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$

ir vadinama **tolydžia iš dešinės taške** x_0 , jei $f(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Išvada: funkcija f yra tolydi taške x_0 ,

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Teorema. Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ tolydžios taške x_0 , tai funkcijos:

$f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, kai $g(x_0) \neq 0$ yra tolydžios tame taške.

Sakykime, kad f yra tolydi intervale $(a; b)$, jeigu ji yra tolydi kiekviename to intervalo taške. Funkcija f yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, jei ji tolydi intervale $(a; b)$, taške a tolydi iš dešinės, o taške b – tolydi iš kairės.

Pavyzdys. Su kuriomis parametru a ir b reikšmėmis funkcija $f(x)$ bus tolydi visuose apibrėžimo srities taškuose:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg(x), & x \leq 0, \\ ax + b, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 2. \end{cases}$$

Funkcijų trūkio taškai

SVARBU!!!

Apibrėžimas. Taškas x_0 yra funkcijos f trūkio taškas, jei šiame taške funkcija yra neapibrėžta arba netolydi.

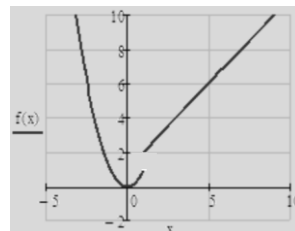
Apibrėžimas. Taškas x_0 yra vadinamas **pirmosios rūšies** trūkio tašku, jei tame taške egzistuoja baigtinės funkcijos ribos iš kairės ir iš dešinės, tačiau jos nėra lygios $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

Sakoma, kad taške x_0 funkcija daro baigtinį šuolį.

Pavyzdys. Taškas $x = 1$ yra funkcijos $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ trūkio taškas.

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1; \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2;$$

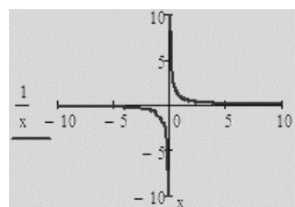
$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, todėl taškas $x = 1$ yra pirmos rūšies trūkio taškas.



Apibrėžimas. Jei taške x_0 bent viena funkcijos f vienos pusės riba neegzistuoja arba yra begalinė, tai taškas x_0 vadinamas funkcijos **antrosios rūšies** trūkio tašku.

Pavyzdys. Taškas $x = 0$ yra funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ trūkio taškas.

$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$, todėl taškas $x = 0$ – antros rūšies trūkio taškas.



Apibrėžimas.

Taškas x_0 vadinamas funkcijos f **pašalinamuoju** trūkio tašku, jei $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Tokį trūkio tašką galima pašalinti funkcijos reikšmę $f(x_0)$ pakeisdami jos riba $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

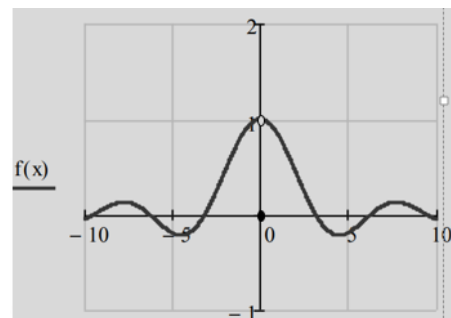
Pavyzdys. Taškas $x = 0$ yra funkcijos $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ trūkio taškas,

nes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, o $f(0) = 0$.

Jis yra pašalinamasis trūkio taškas, nes galima sudaryti naują tolydžią

taške $x = 0$ funkciją $g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$. Funkcijos reikšmę $f(0)$

pakeitėme jos ribine reikšme taške $x = 0$, t.y. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



1 Pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x}{5-x}$ trūkio tašką ir nustatykite jo rūšį.

2 Pavyzdys. Funkcija $y = f(x)$ taške $x = -2$ yra trūkė. Vienpusės ribos šiame taške yra:

$$f(-2 - 0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = 3,$$

$$f(-2 + 0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = -\infty.$$

Kokios rūšies trūkio taškas?

3 Pavyzdys. Kokios rūšies trūkio taškas?

