

Funkcijos išvestinė

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi taške.

Pažymėkime: Δx – argumento pokytis; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – funkcijos pokytis.

Apibrėžimas. Funkcijos $y = f(x)$ išvestinė (x atžvilgiu) taške x_0 vadiname tos funkcijos pokyčio Δy ir jį atitinkančio argumento pokyčio Δx santykio ribą, kai Δx artėja prie nulio.

Taigi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funkcijos išvestinė, apskaičiuota konkrečiame taške yra skaičius, apibūdinantis funkcijos kitimo greitį tame taške. Išvestinė, apskaičiuota su bet kokia kintamojo x reikšme, yra kintamojo x funkcija $y' = f'(x)$.

Jei norima rasti f-jos $y = f(x)$ išvestinę bet kuriame taške x , taikant tik išvestinės apibrėžimą, tai:

- 1) argumentui x suteikiame pokytį Δx ir randame Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

- 2) f-jos pokytį Δy dalijame iš argumento pokyčio $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

- 3) surandame gauto santykio ribą, kai $\Delta x \rightarrow 0$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Pavyzdys. Rasime funkcijos $y = e^x$ išvestinę (pagal apibrėžimą):

Užduotys. Taikydami išvestinės apibrėžimą raskite funkcijų išvestines:

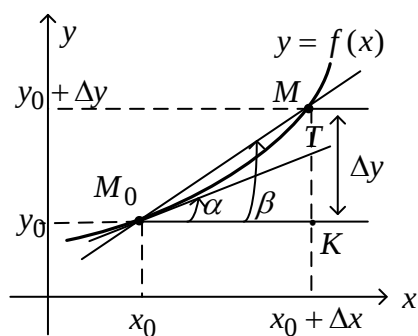
- 1) $y = \sqrt{x}$;

- 2) $y = \frac{1}{x}$;

Apibrėžimas. Funkcija, kuri turi išvestinę taške $x = x_0$, vadinama **diferencijuojama** tame taške.

Teorema. Jei funkcija $y = f(x)$ taške $x = x_0$ turi išvestinę, tai ji tame taške tolydi.

[Jei f yra diferencijuojama taške x_0 , tai ji tolydi.] **Pastaba: Atvirkščias teiginys ne visada teisingas!!!**



Išvestinės geometrinė prasmė

Apibrėžimas. Ribinė kirstinės M_0M padėtis M_0T , kurią ji užima, kai taškas M kreivę artėja prie taško M_0 , vadinama **kreivės liestine** taške M_0 .

Funkcijos f išvestinės reikšmė taške x_0 yra lygi liestinės, einančios per tašką M_0 , krypties koeficientui.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}(\alpha) = k_T.$$

Apibrėžimas. Tiesė, einanti per lietimosi tašką M_0 ir statmena liestinei T , vadinama **kreivės normale**.

1.	f-jos kitimo greitis taške x_0	$f'(x_0)$
2.	kūno greitis $v = S'(t)$	-tai kūno nueito kelio $S = S(t)$ išvestinė laiko t atžvilgiu
3.	kūno pagreitis	-tai greičio išvestinė t atžvilgiu
4.	kreivės liestinės krypties koeficientas	$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ α – kampas kurį liestinė sudaro su Ox ašimi
5.	Liestinės lygtis (per tašką $M_0(x_0, y_0)$)	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, čia $y_0 = f(x_0)$.
6.	Normalės lygtis	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Funkcijų diferencijavimo taisyklės

1.	$C' = 0$. Pastovaus dydžio išvestinė lygi nuliui.
2.	$x' = 1$. Argumento išvestinė lygi 1.
3.	$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$, $C - \text{const.}$
4.	$(u + v)' = u' + v'$; čia $u = u(x)$, $v = v(x)$.
5.	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
6.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.
7.	Jei $y = y(u)$, o $u = u(x)$, tai $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (sudėtinės funkcijos išvestinė)
8.	Jei funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinė funkcija yra $x = g(y)$, tai $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $y'_x \neq 0$.
9.	$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$; čia $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Neišreikštinių funkcijų diferencijavimas

Diferencijuodami panariui lygtį $F(x, y) = 0$ argumento x atžvilgiu ir laikydami, kai y yra argumento x funkcija, gausime naują lygtį, kurioje bus y .

Pavyzdys. Rasime neišreikštinės funkcijos išvestinę y'_x : $x \sin y + y \sin x = 0$

Logaritminis diferencijavimas

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v(\ln u)' \cdot y$$

$$y' = y \left(v' \ln u + v(\ln u)' \right)$$

Pavyzdys. Rasime funkcijos $y = (2x)^{3x}$ išvestinę.

Funkcijos, apibrėžtos parametrinėmis lygtimis, diferencijavimas

Teorema. Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ apibrėžta parametrinėmis lygtimis

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

be to, funkcija $\varphi(t)$ yra tolydi ir monotoninė, tai egzistuoja atvirkštinė funkcija $t = \Phi(x)$. Įrašę t išraišką - gauname sudėtinę argumento x funkciją $y = \psi(\Phi(x))$. Jos išvestinė:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$\text{Taigi } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}, y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xt})'_t}{x'_t}, \dots$$

Pavyzdys. Rasime parametrinės funkcijos (astroidės) pirmos eilės išvestinę: $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

Lopitalio taisyklė

Teorema (Lopitalio). Tarkime, kad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$; Taško a aplinkoje egzistuoja $f'(x)$ ir $g'(x)$,

be to, $g'(x) \neq 0$. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, tai $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Pastaba. Lopitalio teorema teisinga tik tada, kai turime neapibrėžtumą $\left[\frac{0}{0} \right]$, kai $x \rightarrow a$. Taip pat ji taikoma neapibrėžtumui $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$.

Pavyzdžiai:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$

Jeį turime neapibręztumus $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, juos pertvarkome į $\left[\frac{0}{0}\right]$ arba $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \cdot g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Pavyzdys: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Jeį turime neapibręztumus $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$, ribą žymime raide ir logaritmuojame abi lygybės puses.

Pavyzdys: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = [1^\infty] = \mathbf{A}$

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

Taikydami išvestinės apibręžimą, raskite funkcijų išvestines: $y = \frac{2}{9-x}$; $y = 3x - x^2$; $y = \sqrt{3x}$; $y = (x + 1)^2$.