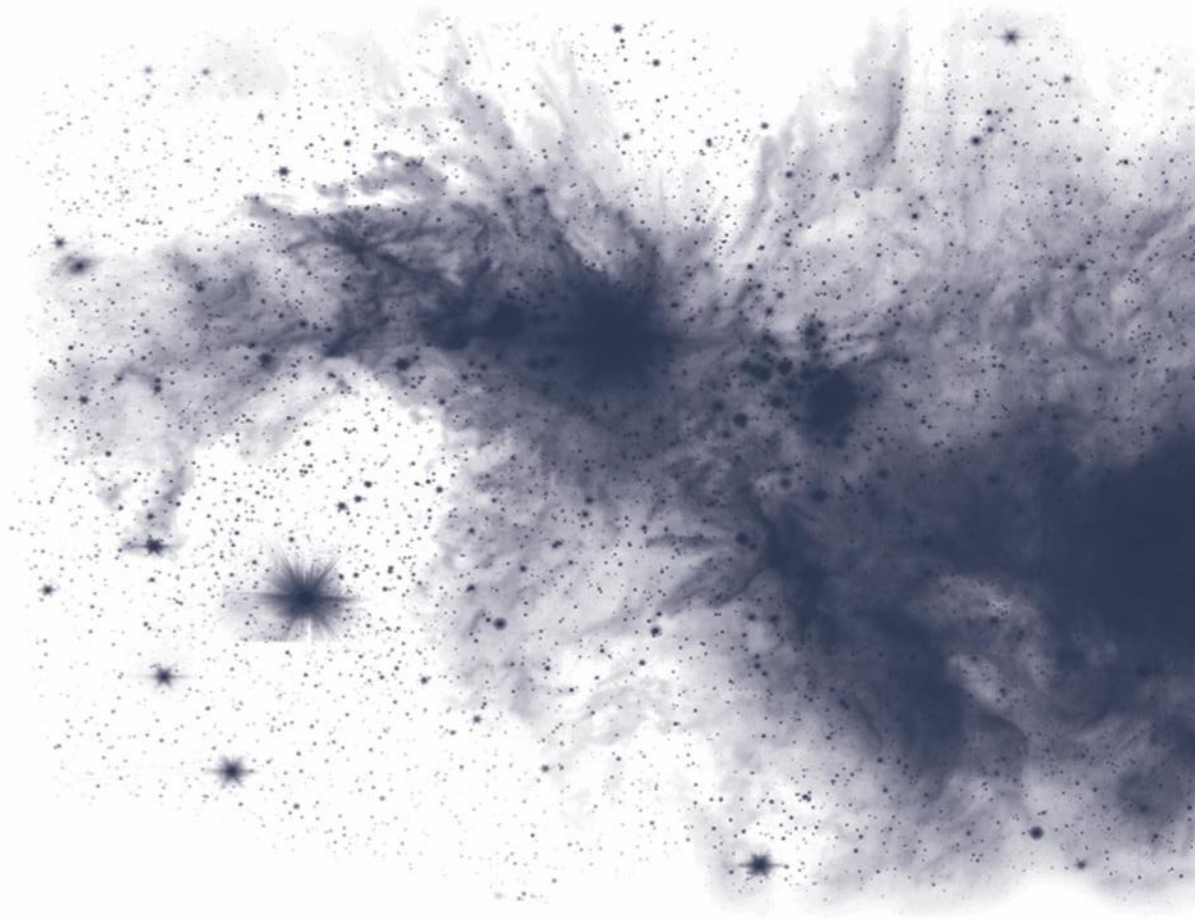


10 PASKAITA

DIFERENCIALAS.
FUNKCIJOS TYRIMAS.



- Funkcijos diferencialo apibrėžimas.
- Diferencialo geometrinė prasmė.
- Diferencialo formos invariantiškumo savybė.
- Kreivės asimptočių apibrėžimai ir radimas.

Teorema.

Funkcija $f(x)$ taške $x = a$ turi **baigtinę ribą** b tada ir tik tada, kai ji išreiškiama suma

$$b + \alpha(x),$$

kurioje $\alpha(x)$ yra nykstamoji funkcija, kai $x \rightarrow a$.

DIFERENCIALO APIBRĖŽIMAS

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama intervale (a, b) t.y. egzistuoja baigtinė riba

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Šią lygybę užrašysime taip:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

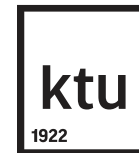
čia $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, kai $\Delta x \rightarrow 0$.

Tada

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$



DIFERENCIALO APIBRĖŽIMAS



Kadangi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$

tai $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$.

Taigi, funkcijos pokytį $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ sudaro du dėmenys:

pirmasis $(f'(x)\Delta x)$ vadinamas **pagrindine pokyčio dalimi**;

antrasis $(\alpha(\Delta x)\Delta x)$ yra aukštesnės eilės nykstamasis dydis negu Δx



DIFERENCIALO APIBRĖŽIMAS

Apibrėžimas. Pagrindinė funkcijos $f(x)$ pokyčio Δy dalis $f'(x)\Delta x$ yra vadinama šios **funkcijos diferencialu** taške x ir žymima

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

Argumento pokytis lygus jo diferencialui, nes kai $y = x$,

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x \quad \Rightarrow \quad dx = \Delta x$$

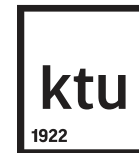
Iš čia gauname

$$dy = f'(x)dx$$

$$\text{ir } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$



DIFERENCIALO FIZIKINĖ PRASMĖ



Kadangi $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

tai $\Delta y \approx dy$, kai $o(\Delta x)$ yra pakankamai mažas. Iš čia gauname

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

ir

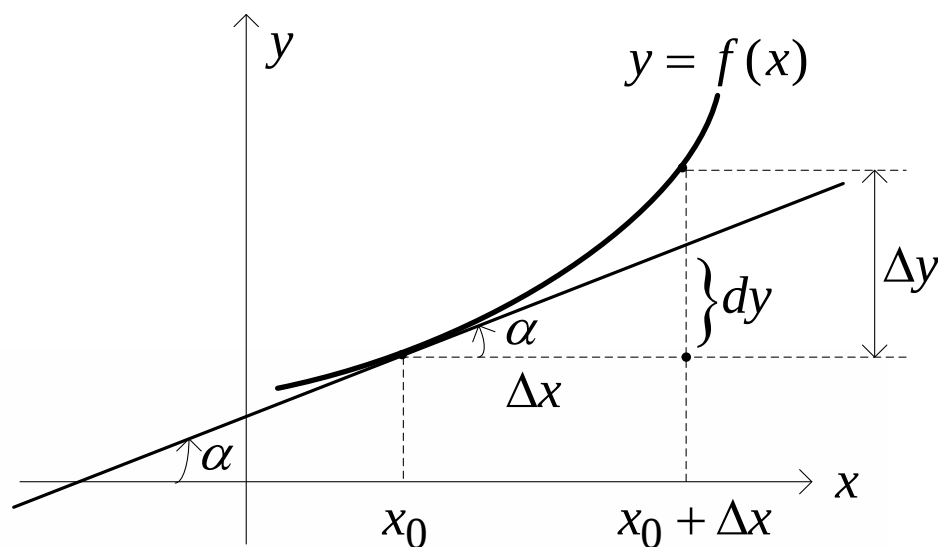
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Fizikinė prasmė. Lygybę $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ galima taikyti apytiksliam skaičiavimui.

Pavyzdys. $\sqrt{65} = \sqrt{64 + 1} \approx \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}} \cdot 1 = 8 + \frac{1}{16} = 8.0625$

DIFERENCIALO GEOMETRINĖ PRASMĖ

Funkcijos diferencialas lygus liestinės, nubrėžtos per tašką x_0 , ordinatės pokyčiui, kai argumento pokytis yra Δx .



$$[dy = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \Delta x]$$



DIFERENCIALO SAVYBĖS

1. $d(c) = 0$, nes $c' = 0$;

2. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, nes $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

3. $d(u + v) = du + dv$,
nes $d(u + v) = (u + v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv$;

4. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$,
nes $d(u \cdot v) = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$;

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$,

nes $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{u'v dx - uv' dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$;

6. Diferencialo formos invariantiškumo savybė.

Jei $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, tai $dy = f'(u)du$,

t.y. sudėtinės funkcijos diferencialo forma yra tokia pati, kaip ir tuo atveju, jei u būtų nepriklausomas kintamasis.

Irodymas.

$$dy = dy(\varphi(x)) = \left(y(\varphi(x)) \right)' dx = y'_u \cdot u'_x dx = f'(u)du$$



FUNKCIJOS TYRIMAS



FUNKCIJOS MONOTONIŠKUMAS

1 Teorema. Būtinās funkcijos monotoniškumo požymis.

Jei funkcija $f(x)$ intervale (a, b) **didėja (mažėja)**, tai jos išvestinė tame intervale yra neneigiama: $f'(x) \geq 0$

(neteigiama: $f'(x) \leq 0$).

2 Teorema. Pakankamas funkcijos monotoniškumo požymis.

Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) intervale (a, b) , tai funkcija $f(x)$ tame intervale didėja:

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ (mažėja: $f(x_2) - f(x_1) < 0$).

3 Teorema. Funkcijos pastovumo požymis.

Jei funkcijos $f'(x) = 0$ intervale (a, b) , tai funkcija tame intervale yra pastovi: $f(x) = f(x_0) \forall x, x_0 \in (a, b)$.

Išvada. Jei dviejų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestinės sutampa intervale (a, b) , tai tos funkcijos skiriasi minėtame intervale tik konstanta, t.y. $f(x) - g(x) = C, x \in (a, b)$.

FUNKCIJOS EKSTREMUMAI

Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_1)$ vadinama funkcijos **maksimumu**, kai egzistuoja tokia taško x_1 aplinka $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ kurioje su visais x teisinga nelygybė

$$f(x) \leq f(x_1).$$

Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_2)$ vadinama funkcijos **minimumu**, kai egzistuoja tokia taško x_2 aplinka $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ kurioje su visais x teisinga nelygybė

$$f(x) \geq f(x_1).$$

Apibrėžimas. Funkcijos maksimumą ir minimumą vadinsime jos **ekstremumais**, o atitinkamas argumento reikšmės x_1 ir x_2 - ekstremumo taškai.

BŪTINOS EKSTREMUMO SĄLYGOS

Teorema. Būtina ekstremumo sąlyga.

Jei diferencijuojama funkcija $f(x)$ taške $x = x_0$ turi ekstremumą, tai $f'(x_0) = 0$ arba neegzistuoja.

Pastaba:

Jei $f(x_0)$ yra ekstremumas, tai būtinai $f'(x_0) = 0$ arba neegzistuoja, bet ne atvirkščiai.

Jei $f'(x_0) = 0$ tai to nepakanka, kad x_0 būtų ekstremumas.

Apibrėžimas. Visus taškus, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja, vadiname funkcijos **kritiniais taškais**.

1 Teorema. Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x)$ keičia ženklą, pereidama per kritinį tašką x_0 , tai taške x_0 funkcija $f(x)$ turi ekstremumą:

- a) **maksimumą**, kai $f'(x)$ keičia ženklą iš pluso į minusą;
- b) **minimumą**, kai $f'(x)$ keičia ženklą iš minuso į plusą.

2 Teorema. (2-oji lokaliojo ekstremumo sąlyga) Jei taške x_0 funkcijos $f(x)$ pirmoji išvestinė $f'(x) = 0$, o antroji išvestinė $f''(x_0)$ taško x_0 aplinkoje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ yra tolydi ir

$f''(x) \neq 0$, tai taške x_0 funkcija $f(x)$ turi:

- a) **maksimumą**, kai $f''(x_0) < 0$;
- b) **minimumą**, kai $f''(x_0) > 0$.

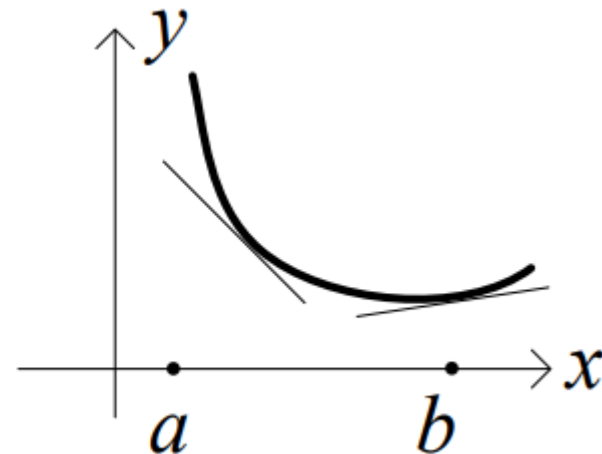
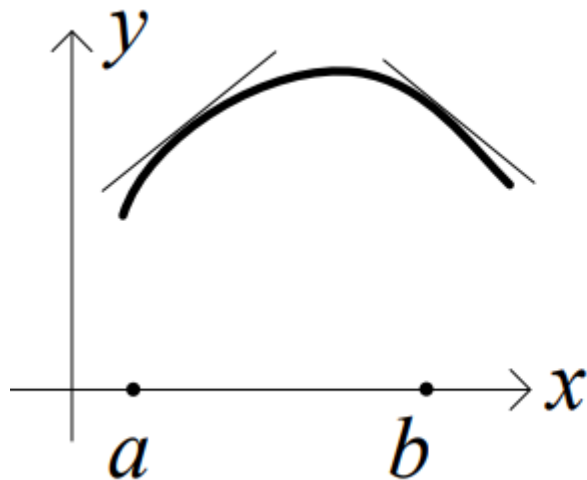
DIDŽIAUSIA IR MAŽIAUSIA FUNKCIJOS REIKŠMĖS ATKARPOJE

Norėdami rasti funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes atkarpoje $[a, b]$, turime:

- a) rasti kritinius taškus, priklausančius intervalui $[a, b]$;
- b) apskaičiuoti funkcijos reikšmes kritiniuose taškuose ir intervalo galuose a ir b ;
- c) iš visų gautų reikšmių išrinkti didžiausią M ir mažiausią m reikšmę.

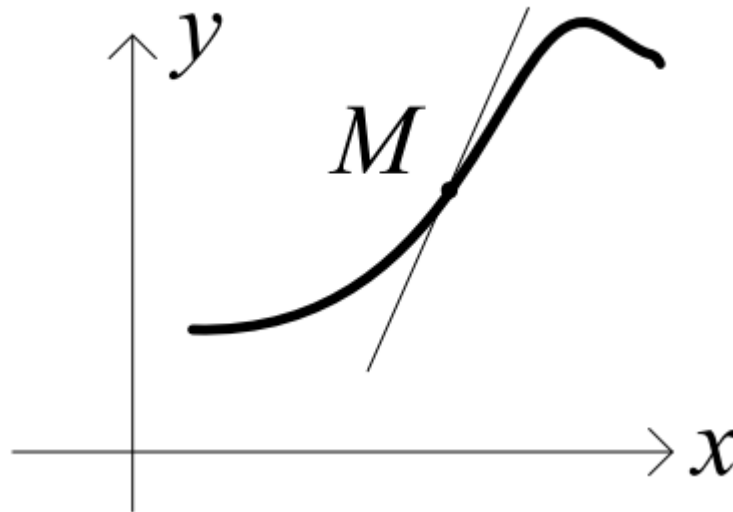
FUNKCIJOS IŠKILUMAS

Apibrėžimas. Kreivė vadinama iškila aukštyn (žemyn) intervale (a, b) , jei visi tos kreivės taškai tame intervale yra po liestine (virš liestinės), nubrėžta per bet kurį kreivės tašką.



PERLINKIO (VINGIO) TAŠKAI

Apibrėžimas. Taškas M , kuris atskiria iškilą aukštyn kreivės dalį nuo iškilos žemyn kreivės dalies, vadinamas kreivės **perlinkio (vingio) tašku**.



FUNKCIJOS IŠKILUMAS IR PERLINKIO (VINGIO) TAŠKAI



1 Teorema. Jei intervale (a, b) funkcija $f(x)$ turi antrąją išvestinę $f''(x)$, kuri yra neigiama (teigiama), tai kreivė tame intervale yra iškila aukštyn $\cap$ (žemyn $\cup$).

2 Teorema. (Būtina perlinkio taško sąlyga.) Jei $f(x)$ intervale (a, b) turi tolydžią antrąją išvestinę ir taškas $x_0 \in (a, b)$ yra kreivės perlinkio taškas, tai $f''(x_0) = 0$.

3 Teorema. Jei $f''(x_0) = 0$ ir antroji išvestinė, pereidama tašką x_0 , keičia ženklą, tai taškas x_0 - kreivės perlinkio taškas.



FUNKCIJOS GRAFIKO ASIMPTOTĖS



Apibrėžimas. Tiesė vadinama kreivės asimptote, jei bet kurio kreivės taško atstumas iki tos tiesės artėja prie nulio, taškui tolstant kreivė.

Asimptotės skirstomos į dvi grupes:

1. Vertikaliosios asimptotės. Jei nors vieną iš ribų

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

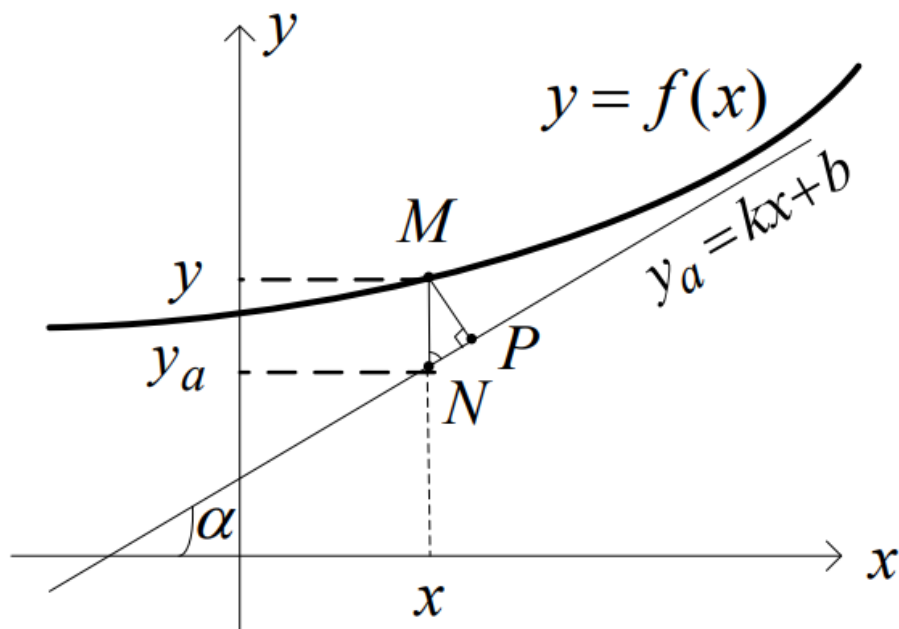
yra begalinė, tai tiesė $x = a$ yra vertikalioji asimptotė.



FUNKCIJOS GRAFIKO ASIMPTOTĖS

2. Pasvirosios asimptotės.

Pasvirosios asimptotės lygtis $y = kx + b$.



$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$



FUNKCIJOS GRAFIKO ASIMPTOTĖS



Pastabos:

- 1) kai $k = 0$, gauname asimptotę $y = b$, lygiagrečią Ox ašiai (horizontalią asimptotę);
- 2) jei skaičiuodami koeficientus k ir b , gauname, kad bent viena iš ribų yra begalinė arba neegzistuoja, tai funkcijos grafikas pasvirosios asimptotės neturi;
- 3) ieškodami koeficientų k ir b , turime atsižvelgti į tai, kad užrašas $x \rightarrow \infty$ reiškia $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$. Todėl, reikalui esant skaičiuojame ribas abiem variantais, nes jos gali būti skirtingos.

FUNKCIJOS GRAFIKO ASIMPTOTĖS

Užduotis. Raskite funkcijos asimptotę: $y = \frac{4-x^2}{x-1}$.

Kreivės **vertikaloji asimptotė** yra tiesė $x = 1$, nes

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4-x^2}{x-1} = -\infty \text{ ir } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{4-x^2}{x-1} = +\infty.$$

Pasvirosios asimptotės lygtis yra $y = kx + b$.

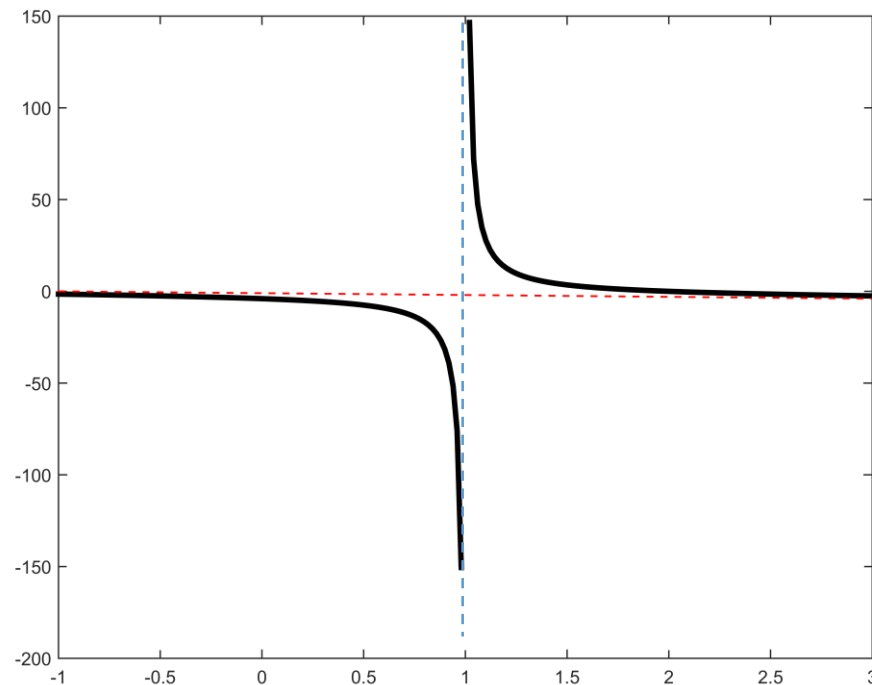
Rasime koeficientus k ir b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{x(x-1)} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-x^2}{x-1} + x \right) = -1.$$

FUNKCIJOS GRAFIKO ASIMPTOTĖS

ATS. Kreivės vertikalioji asimptotė yra tiesė $x = 1$ (mėlina),
 $y = -x - 1$ yra pasviroji asimptotė (raudona).



BENDROJI FUNKCIJOS TYRIMO IR JOS GRAFIKO BRAIŽYMO SCHEMA

1. Randame funkcijos apibrėžimo sritį.
2. Jei funkcija turi trūkio taškų, randame funkcijos ribas šiuose taškuose, o taip pat apibrėžimo srities galuose.
3. Nustatome, ar funkcija lyginė, ar nelyginė, ar periodinė.
4. Randame funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus.
5. Randame funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumus.
6. Randame funkcijos grafiko iškilumo aukštyn ir žemyn intervalus bei perlanko taškus.
7. Randame grafiko asimptotes.
8. Braižome grafiką.

- Diferencialas.
- Funkcijos tyrimas:
 - ✓ Funkcijos monotoniškumas;
 - ✓ Funkcijos ekstremumai;
 - ✓ Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės atkarpoje;
 - ✓ Funkcijos iškilumas;
 - ✓ Perlinkio (vingio) taškai;
 - ✓ Asimptotės.

KITA PASKAITA

- Kelių kintamųjų funkcijos:
 - ✓ Sąvoka;
 - ✓ Dalinės išvestinės ir jų geometrinė prasmė;
 - ✓ Pilnasis funkcijos diferencialas;
 - ✓ Sudėtinės funkcijos ir jų diferencijavimas;
 - ✓ Neišreikštinės funkcijos ir jų diferenciacijavimas;
 - ✓ Dviejų kintamųjų funkcijos lokalieji ekstremumai.
- Antrosios eilės paviršiai.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Užduotys. Raskite funkcijos diferencialą:

$$\text{a) } y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-2}} - \cos x^2; \quad \text{b) } y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{2-x}} + \operatorname{tg} x^2;$$

$$\text{c) } y = e^x \cdot \sqrt{x^2 - 3} - \operatorname{tg}^2(2x - 1);$$

$$[dy = f'(x)dx]$$

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

Užduotys. Raskite funkcijos asimptotes:

a) $y = \frac{x-2}{x+3}$; b) $y = \frac{2x^2-9}{x+2}$; c) $y = \frac{x^5}{x^4-1}$;

d) $y = x + e^{2x}$;

Ats: a) $x = -3$ (vertikalioji), $y = 1$ (pasviroji);

b) $x = -2$ (vertikalioji), $y = 2x - 4$ (pasviroji);

c) $x = \pm 1$ (vertikaliosios), $y = x$ (pasviroji);

d) $y = x$ (pasviroji), kai $x \rightarrow -\infty$.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt