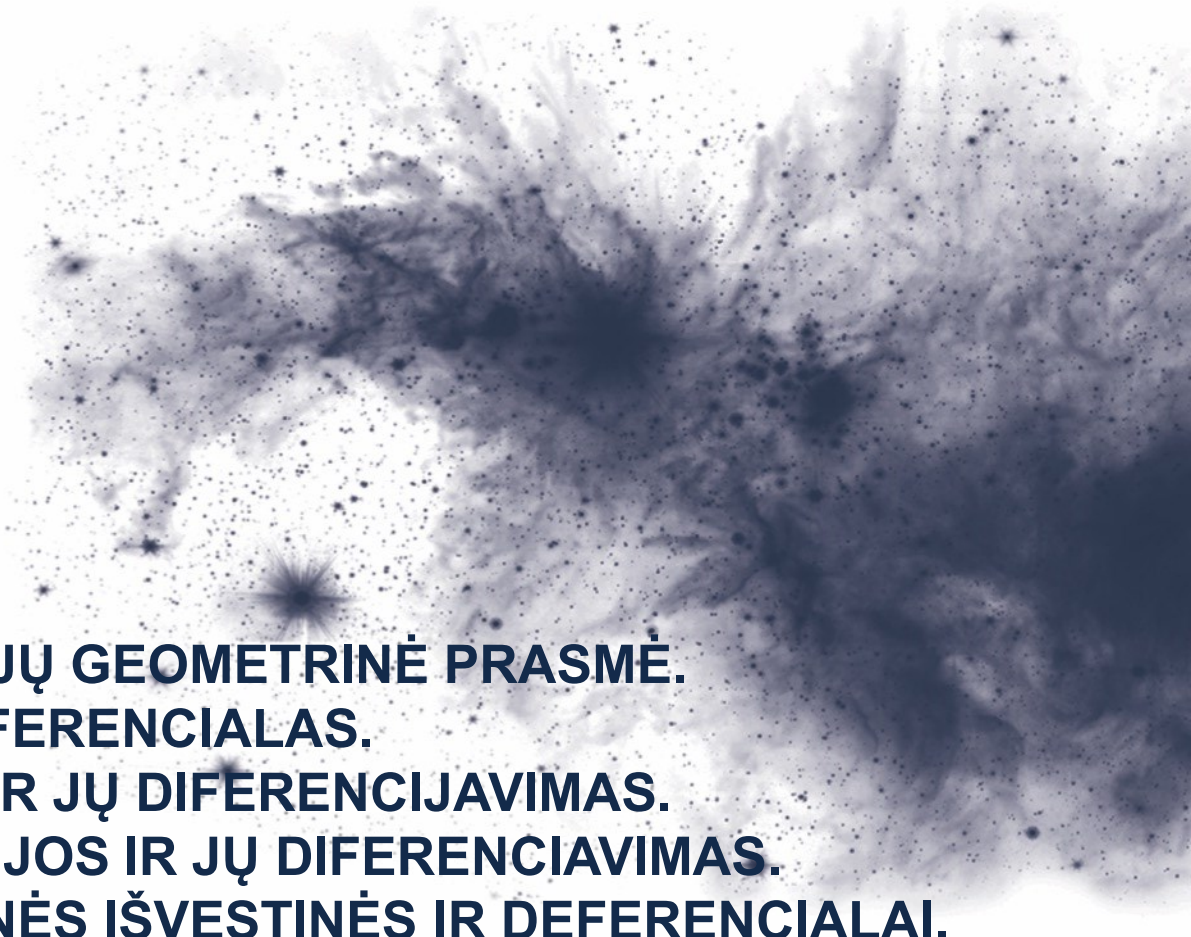


11 PASKAITA

A large, ethereal image of a cosmic dust cloud or nebula occupies the right half of the slide. It features a dense, dark blue and purple core with wispy, lighter-colored filaments extending outwards, creating a sense of depth and vastness.

**DALINĖS IŠVESTINĖS IR JŲ GEOMETRINĖ PRASMĖ.
PILNASIS FUNKCIJOS DIFERENCIALAS.
SUDĖTINĖS FUNKCIJOS IR JŲ DIFERENCIJAVIMAS.
NEIŠREIKŠTINĖS FUNKCIJOS IR JŲ DIFERENCIJAVIMAS.
AUKŠTESNIŲ EILIŲ DALINĖS IŠVESTINĖS IR DIFERENCIALAI.**

- Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių apibrėžimas ir geometrinė prasmė.
- Kelių kintamųjų sudėtinės funkcijos pilnosios ir dalinių išvestinių apskaičiavimo formulių išvedimas.
- Neišreikštinių funkcijų $F(x, y) = 0$ arba $F(x, y, z) = 0$ dalinių išvestinių apskaičiavimo formulių išvedimas.

Apibrėžimas. Aibė, kurios elementai yra realiųjų skaičių rinkiniai $x = (x_1, \dots, x_n)$, vadinama erdve R^n . Elementus vadinsime R^n erdvės taškais arba vektoriais.

Atstumu tarp dviejų erdvės R^n taškų $x = (x_1, \dots, x_n)$ ir $y = (y_1, \dots, y_n)$ vadiname skaičių

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Erdvė R^n , kurioje apibrėžtas atstumas, vadinama **metrine erdve**.

KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS SĄVOKA

Tarkime, kad aibė D yra metrinės erdvės R^n poaibis.

Apibrėžimas. Taisyklė f , kiekvienam $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ priskirianti vieną ir tik vieną realiųjų skaičių $u \in E \subset R$, vadinama n kintamųjų funkcija ir žymima $u = f(x_1, \dots, x_n)$ arba $f : D \rightarrow E$.

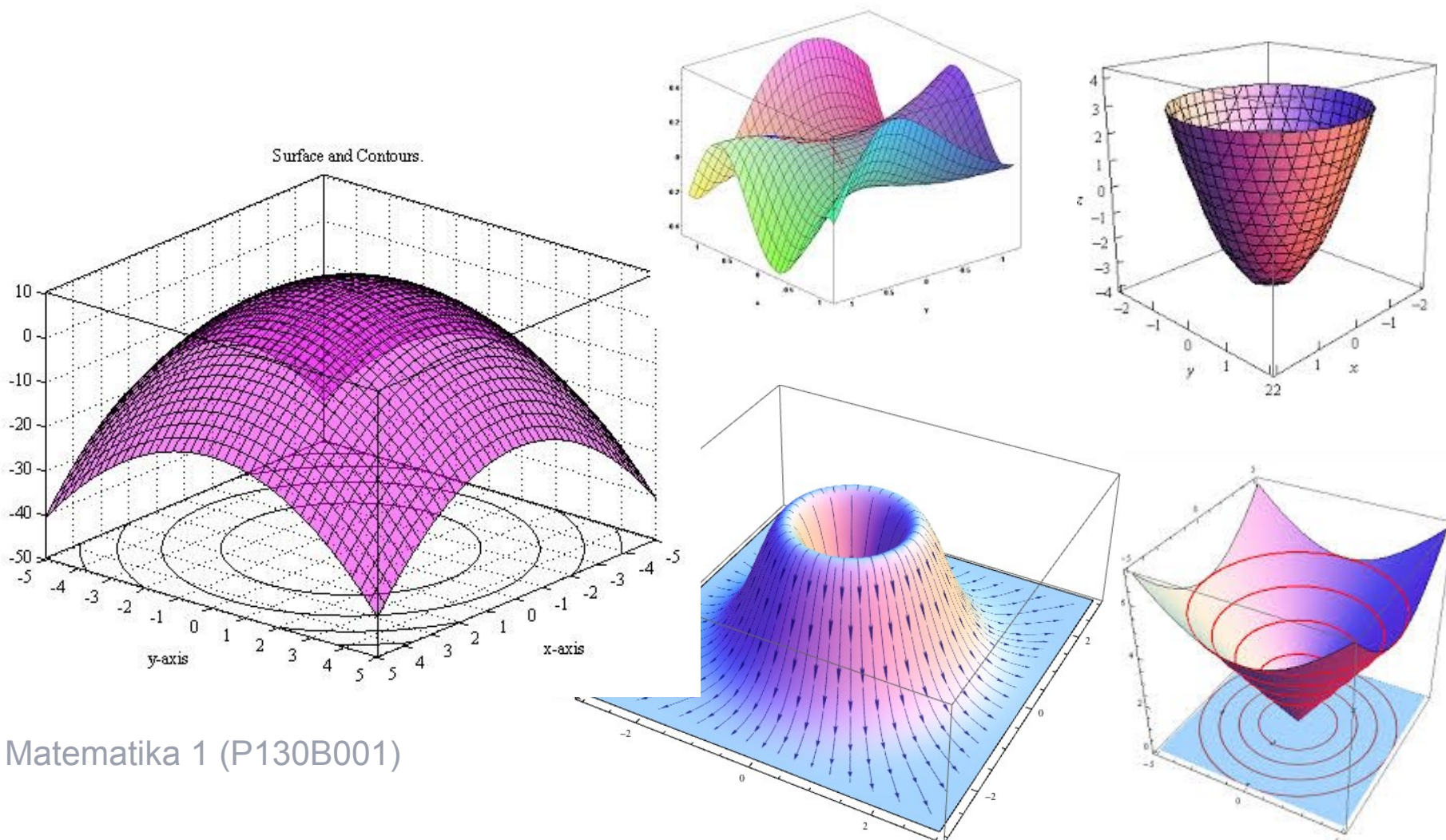
D – apibrėžimo sritis, E – funkcijos reikšmių sritis.

KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS SĄVOKA

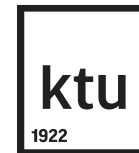
ktu

1922

Dviejų kintamųjų funkcija $z = f(x, y)$ yra paviršius.



DALINĖS IŠVESTINĖS APIBRĖŽIMAS



Tarkime, kad funkcija $z = f(x, y)$ yra apibrėžta srityje D , o taškas $M_0(x_0, y_0)$ yra vidinis srities D taškas.

Jei argumentui y suteiksime pastovią reikšmę y_0 , tai gausime vieno kintamojo x funkciją $z = f(x, y_0)$. Apskaičiuosime šios funkcijos pokytį, kuris atsiranda dėl argumento pokyčio Δx . Jį žymėsime $\Delta_x z$ ir vadinsime **daliniu funkcijos pokyčiu**. Tai

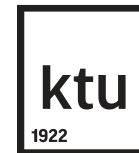
$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Analogiškai apibrėžiame pokytį

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$



DALINĖS IŠVESTINĖS APIBRĖŽIMAS



Pokytis, kuris atsiranda pakitus abiem argumentams x ir y , vadinamas **pilnuoju** ir žymimas Δz .

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Bendru atveju $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Kadangi funkcija $z = f(x, y_0)$ yra vieno kintamojo funkcija, tai galima kalbėti apie jos diferencijavimą kintamojo x atžvilgiu, kai kitas argumentas fiksuotas.

Taip gauta funkcijos išvestinė vadinama **daline išvestine kintamojo x atžvilgiu** ir žymima

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ arba } z'_x.$$



DALINĖS IŠVESTINĖS APIBRĖŽIMAS

Pagal išvestinės apibrėžimą

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

jei ši riba egzistuoja ir yra baigtinė.

Analogiškai apibrėžiama $z = f(x_0, y)$ dalinė išvestinė y atžvilgiu:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

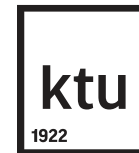


DALINĖS IŠVESTINĖS

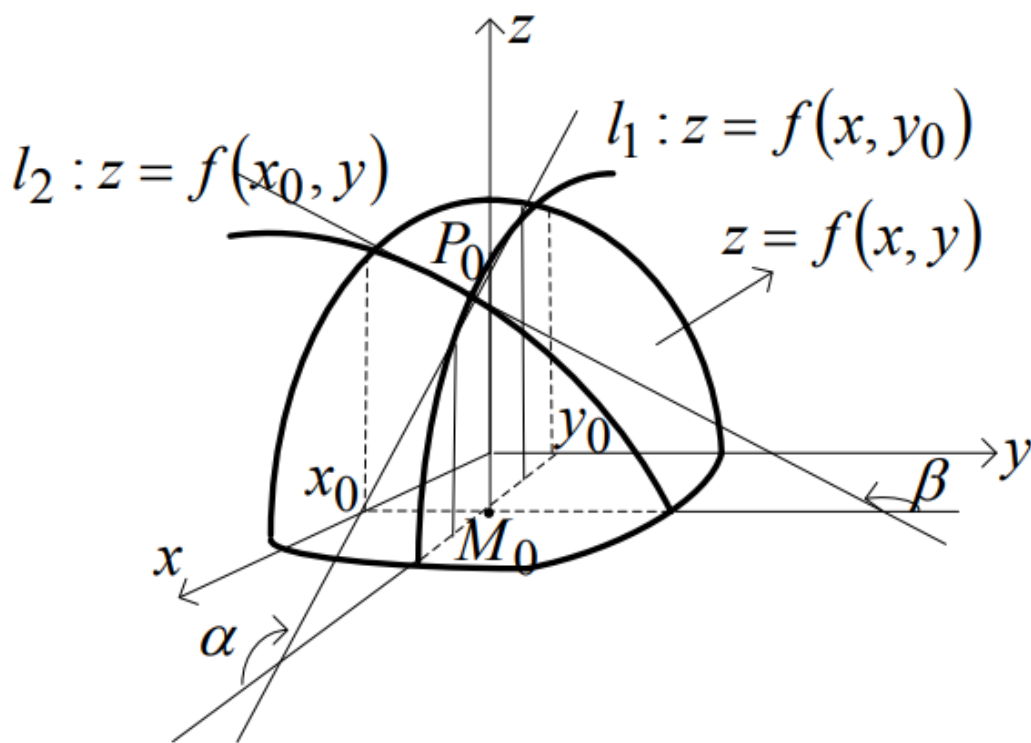
Pavyzdys. Raskite funkcijų dalines išvestines:

- $z = x + y;$
- $z = y^x;$
- $z = xy + \frac{x}{y}.$

DALINĖS IŠVESTINĖS GEOMETRINĖ PRASMĖ



Geometriškai $\frac{\partial z}{\partial x}$ reiškia, kad paviršius $z = f(x, y)$ kertamas plokštuma $y = y_0$. Ši plokštuma iš paviršiaus iškerta kreivę $z = f(x, y_0)$, esančią plokštumoje, lygiagrečioje plokštumai xOz .



Tuomet $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$,
kurį kreivės $z = f(x, y_0)$
liestinė T sudaro su tiese $\parallel Ox$.
Analogiškai $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$,
kurį kreivės $z = f(x_0, y)$
liestinė sudaro su tiese $\parallel Oy$.

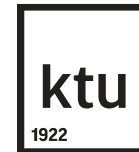
DALINĖS IŠVESTINĖS GEOMETRINĖ PRASMĖ

Dar karta (**SVARBU!**)

- Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial x}$ geometrinė prasmė:
Dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial x}$ reikšmė, apskaičiuota taške M_0 , bus lygi tangentui kampo α , kurį kreivės $z = f(x, y_0)$ liestinė sudaro su tiese, lygiagrečia ašiai Ox .
- Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial y}$ geometrinė prasmė:
Dalinės išvestinės $\frac{\partial z}{\partial y}$ reikšmė, apskaičiuota taške M_0 , bus lygi tangentui kampo β , kurį kreivės $z = f(x_0, y)$ liestinė sudaro su tiese, lygiagrečia ašiai Oy .



PILNASIS FUNKCIJOS POKYTIS



Teorema. Jei funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės $f'_x(x, y)$ ir $f'_y(x, y)$ egzistuoja taške $M_0(x_0, y_0)$ ir jo aplinkoje bei yra tolydžios, tai funkcijos $z = f(x, y)$ pilnąjį pokytį galima išreikšti formule

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\end{aligned}$$

čia $\alpha \rightarrow 0$, kai $\Delta x \rightarrow 0$, ir $\beta \rightarrow 0$, kai $\Delta y \rightarrow 0$.

Apibrėžimas. Funkcija $z = f(x, y)$ vadinama diferencijuojama taške $M_0(x_0, y_0)$ kai jos pilnąjį pokytį galima išreikšti formule $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$;

čia A, B – konstantos, α, β – nykstamos funkcijos, kai $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Teorema (Būtina funkcijos diferencijuojamumo sąlyga).

Jei funkcija $z = f(x, y)$ yra diferencijuojama taške $M_0(x_0, y_0)$, tai egzistuoja dalinės išvestinės $f'_x(M_0)$ ir $f'_y(M_0)$ ir

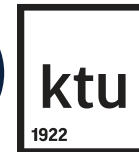
$$f'_x(M_0) = A, f'_y(M_0) = B.$$

Apibrėžimas. Funkcijos $z = f(x, y)$ pilnuoju diferencialu vadiname reiškini

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$



PILNASIS FUNKCIJOS POKYTIS



Kadangi x ir y yra nepriklausomi kintamieji, tai

$\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Todėl

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Atsižvelgę į teoremą apie pilnąją funkcijos pokytį

$$\left[\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \right],$$

gauname

$$\Delta z = dz + o(\rho), \text{ čia } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Kai Δx ir Δy yra pakankamai maži, tai $\Delta z \approx dz$.

SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tarkime, kad srityje D apibrėžta funkcija $z = f(x, y)$, kurios argumentai yra $x = x(t)$, $y = y(t)$. Rasime šios funkcijos pilnąją išvestinę $\frac{dz}{dt}$.

Teorema. Jei funkcija $z = f(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų x ir y atžvilgiu, o funkcijos $x = x(t)$, $y = y(t)$ diferencijuojamos t atžvilgiu, tai

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Irodymas. Pažymėkime Δt - argumento t pokytis. Tada funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ pokyčiai bus Δx ir Δy . Taikydami teoremą apie pilnąją funkcijos $z = f(x, y)$ pokytį, turime

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y;$$

čia $\alpha \rightarrow 0$, kai $\Delta x \rightarrow 0$, ir $\beta \rightarrow 0$, kai $\Delta y \rightarrow 0$.

Abi lygybės puses padaliname iš $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Kadangi funkcijos $x(t)$ ir $y(t)$ yra diferencijuojamos taške t , tai jos yra tolydžios.

Todėl, kai $\Delta t \rightarrow 0$, tai $\Delta x \rightarrow 0$ ir $\Delta y \rightarrow 0$, ir $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

Lygybėje $\left[\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right]$ perėję prie ribos, gauname

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Išvada. Tarkime, kad srityje D apibrėžta funkcija $z = f(x, y)$; čia $x = x(s, t)$ ir $y = y(s, t)$.

Tegul funkcija z turi tolydžias išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ o funkcijos x ir y turi dalines išvestines argumentų s ir t atžvilgiu. Tada

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Irodymas. Tarkime, kad sudėtinės funkcijos $z = f(x(s, t), y(s, t))$ vienas kintamasis t yra fiksuotas. Tada šią funkciją galime traktuoti kaip vieno kintamojo s sudėtinę funkciją.

Taikydami teoremą $\left[\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right]$, gauname

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Fiksuodami kintamąjį s , analogiškai gauname

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tarkime, kad srityje D apibrėžta funkcija $z = f(x, y)$, kurios argumentai yra $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$. Kartu pareikalaukime, kad, kintant t ir s , taškas $(x; y)$ priklausytų D .

Teorema. Jei funkcija $z = f(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų x ir y atžvilgiu, o funkcijos $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ turi tolydžias dalines išvestines argumentų t ir s atžvilgiu, tai

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Irodymas. Suteikime argumentui t pokytį Δt , laikydami s fiksuotu. Tuomet atsiras pokyčiai:

$$\Delta_t x = x(t + \Delta t, s) - x(t, s) \text{ ir } \Delta_t y = y(t + \Delta t, s) - y(t, s).$$

Kartu pakitus x ir y , pasikeis ir z – pilnasis pokytis

$$\Delta z = f(x + \Delta_t x, y + \Delta_t y) - f(x, y),$$

kurį galima išreikšti formule:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_t x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_t y + \alpha \cdot \Delta_t x + \beta \cdot \Delta_t y.$$

Abi lygybės puses padaliname iš $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t}$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

$$\left[\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} \right]$$

Kai $\Delta t \rightarrow 0$, tai ir $\Delta_t x \rightarrow 0$, $\Delta_t y \rightarrow 0$, nes funkcijos x ir y yra tolydžios. Tuomet $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. Apskaičiuokime ribą:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t y}{\Delta t};$$

Iš čia gauname

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Analogiškai įrodytume, kad

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$



SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Pavyzdžiai. 1) Rasti $\frac{dz}{dt}$, kai $z = \sin(x + y^2)$,
 $x = 2 - e^{-t}$, $y = 2\cos(1 - t)$.

$$\left[\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right]$$

2) Rasti $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, kai $z = xy$, $x = s^t$, $y = \frac{s}{t}$.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} ; \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right]$$

NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Teorema. Tarkime, kad funkcija $F(x, y)$ ir jos dalinės išvestinės F'_x ir F'_y yra tolydžios taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinkoje; be to, $F(x_0, y_0) = 0$ ir $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Tada egzistuoja tokia taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinka, kurioje lygtis $F(x, y) = 0$ turi vienintelį sprendinį $y = f(x)$, tenkinantį sąlygą $y_0 = f(x_0)$, o funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė yra tolydžios taško x_0 aplinkoje.



NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Taikydami šią teoremą, rasime neišreikštinės funkcijos $F(x, y) = 0$ išvestinę.

Tarkime, kad lygtis $F(x, y) = 0$ apibrėžia funkciją $y = f(x)$. Tada

$$F(x, f(x)) = 0$$

Diferencijuodami abi pastarosios lygybės puses, gauname:

$$F'_x \cdot \frac{dx}{dx} + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Iš šios lygybės gauname:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$



NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Teorema. Tarkime, kad funkcija $F(x, y, z)$ ir jos dalinės išvestinės F'_x, F'_y, F'_z yra tolydžios taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aplinkoje; be to, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ir $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Tuomet egzistuoja tokia taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aplinka, kurioje lygtis $F(x, y, z) = 0$ turi vienintelį sprendinį $z = \Phi(x, y)$, tenkinantį sąlygą $z_0 = \Phi(x_0, y_0)$, o funkcija z turi dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ taško M_0 aplinkoje.



NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Taikydami šią teoremą, rasime neišreikštinės funkcijos $F(x, y, z) = 0$ išvestines.

Iš pradžių tarkime, kad kintamasis y yra fiksuotas.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, \Phi(x, y)) &= 0 \end{aligned}$$

Diferencijuodami abi pastarosios lygybės puses, gauname:

$$F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$



NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tarę, kad kintamasis x yra fiksuotas, gauname

$$F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Taigi $F(x, y, z) = 0$ dalinės išvestinės apskaičiuojamos pagal formules:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Pavyzdys. Funkcija $xz + x^3 + y^3 = ye^z$. Rasti $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \right]$$

NEIŠREIKŠTINIŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Pavyzdys. Funkcija $xz + x^3 + y^3 = ye^z$. Rasti $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{ATS. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-z-3x^2}{ye^z-x}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^z-3y^2}{ye^z-x}.$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \right]$$

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DALINĖS IŠVESTINĖS

Funkcijos $z = f(x, y)$ dalinės išvestinės

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

yra dviejų kintamųjų x ir y funkcijos, todėl jos taip pat gali turėti išvestines to paties argumento atžvilgiu. Jas žymėsime

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy}$$

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DALINĖS IŠVESTINĖS

arba kito

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx}$$

Analogiškai apibrėžiamos aukštesnių eilių išvestinės.

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DALINĖS IŠVESTINĖS

Teiginys. Bet kokios dvi vienos eilės dalinės išvestinės, kurios skiriasi tik diferencijavimo tvarka ir yra tolydžios tam tikroje srityje D , yra tarpusavyje lygios toje srityje D :

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DALINĖS IŠVESTINĖS

Pavyzdys. Tarkime duota funkcija $z = \ln(x^2 + y)$.

Parodyti, kad $z''_{xy} = z''_{yx}$.

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALAI

Dabar apibrėšime aukštesnių eilių diferencialus.

Turime $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Antrosios eilės diferencialas:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALAI

Taigi simboliškai:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z;$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z;$$

...

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z.$$

ANTROSIOS EILĖS PAVIRŠIAI



SAVARANKIŠKAI

www.mano.ktu.lt

(3.6. Kelių kintamųjų funkcijos sąvoka. Antrosios eilės paviršiai, kompiuterinis vizualizavimas)

- Kelių kintamųjų funkcijos:
 - ✓ Sąvoka;
 - ✓ Dalinės išvestinės ir jų geometrinė prasmė;
 - ✓ Pilnasis funkcijos diferencialas;
 - ✓ Sudėtinės funkcijos ir jų diferencijavimas;
 - ✓ Neišreikštinės funkcijos ir jų diferenciacijavimas.
 - ✓ Aukštesniųjų eilių dalinės išvestinės ir diferencialai

- Skaliarinio argumento vektorinė funkcija.
- Kryptinė išvestinė.
- Gradientas.



UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Užduotys. Raskite funkcijos dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = (x + \ln y)^5 - y \cdot \sin^2 x$;

b) $z = x \ln y - \frac{\sin^2 x}{y}$;

c) $z = \ln \frac{x}{y} + 2^{xy} + 3$;

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Užduotis. Raskite $\frac{dz}{dt}$, kai $z = (3x^2 + 2y^3)$, $x = \ln t$, $y = \operatorname{tg} t$.

$$\left[\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right]$$

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Užduotis. Raskite sudetinės funkcijos $z = (x^3 - y^2)^5$, $x = \cos \frac{u}{v}$, $y = e^{u+2v}$ dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right]$$

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Užduotys. Raskite funkcijos dalines išvestines $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = x^2y + z^2x - zy^2;$

b) $\frac{x^2 \cdot y}{z} = \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{x+y^2} \right).$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \right]$$

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt