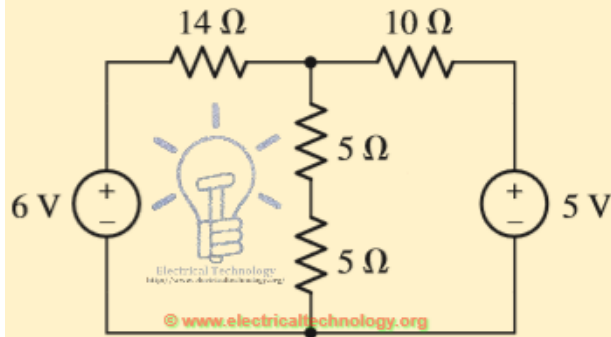


1 PASKAITA

**MATRICOS, VEIKSMAI SU MATRICOMIS.
DETERMINANTAI.
ATVIRKŠTINĖ MATRICA.**

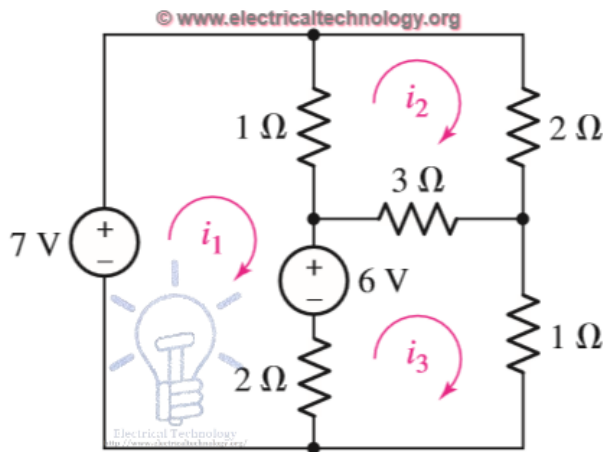
Determine i_1 and i_2 in the circuit.



■ Ans: +184.2 mA; -157.9 mA.

Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 24i_1 - 10i_2 = 6; \\ -10i_1 + 20i_2 = -5. \end{cases}$$



Gauname lygčių sistemą:

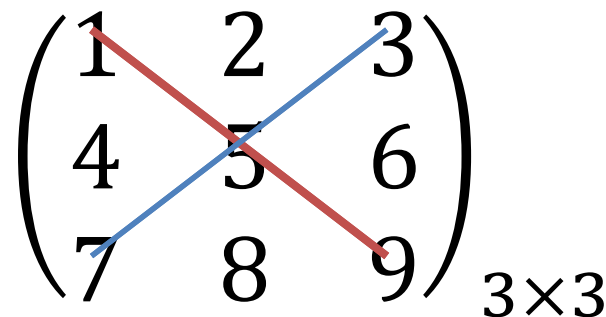
$$\begin{cases} 3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1 \\ -i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \\ -2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6 \end{cases}$$

Apibrėžimas. Stačiakampė $m \times n$ skaičių lentelė, sudaryta iš m eilučių ir n stulpelių, vadinama **matrica** ir žymima

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Matricos A formatas žymimas: $\tau(A) = [m \times n]$.

Apibrėžimas. Matrica, kurios eilučių ir stulpelių skaičius yra vienodas, t.y. $m = n$, vadinama **kvadratine** n – tosios eilės matrica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$


Kvadratinės matricos elementai

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sudaro **pagrindinę įstrižainę** (—————),
o elementai

$a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ sudaro **šalutinę įstrižainę** (—————).

Kvadratinė n -tosios eilės matrica, kurios pagrindinės įstrižainės elementai yra **vienetai**, o visi kiti elementai – nuliai, vadinama **vienetine n -tosios eilės matrica** ir žymima E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Jei matricoje A visas jos eilutes sukeičiame vietomis su tų pačių numerių stulpeliais, tai gautume matricos A **transponuotą matricą**:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kvadratinė matrica, kurios elementams galioja lygybė $a_{ij} = a_{ji}$ vadinama **simetrine**.

Priminimas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinama **nuline matrica** ir žymima O .

$$P_{VZ.}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dvi vienodo formato matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ vadinamos **lygiomis**, kai jų atitinkami elementai yra lygūs, t.y. $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

$$P_{VZ.}: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Dviejų vienodo formatų matricų $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ **suma (skirtumu)** vadinama matrica $C = (c_{ij})$, kurios kiekvienas elementas yra matricų A ir B atitinkamų elementų suma (skirtumas), t.y. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.
2. **Matricą** $A = (a_{ij})$ **dauginami iš skaičiaus** $\alpha \in R$, gauname to paties formato matricą $\alpha A = B = (b_{ij})$, kurios kiekvienas elementas lygus matricos A atitinkamo elemento ir skaičiaus α sandaugai, t.y. $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Pavyzdys. Atlikite veiksmus su matricomis A ir B :

$$A^T, A + B, A - B, -5B,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pavyzdys. Atlikite veiksmus su matricomis A ir B :

$$A^T, A + B, A - B, -5B,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

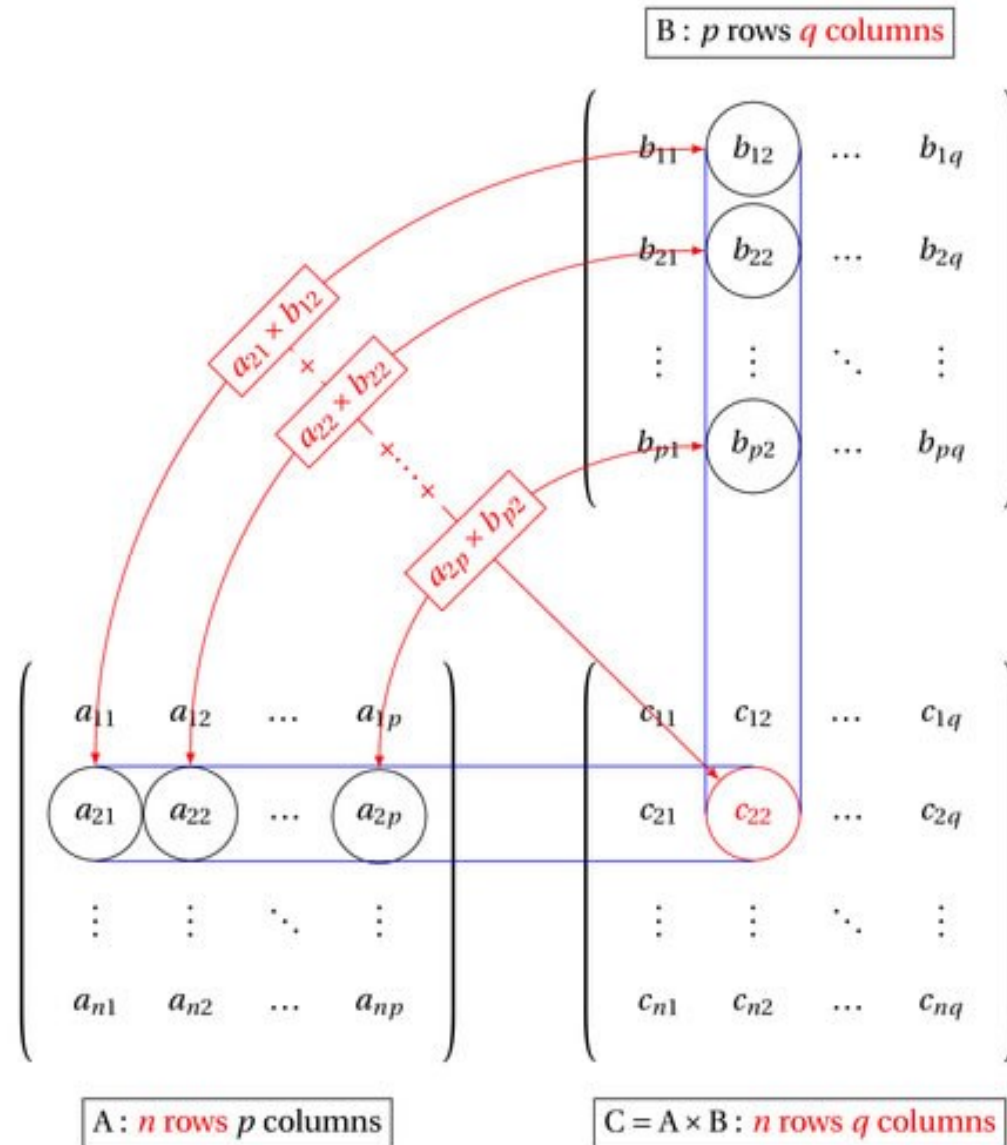
$$-5B = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Jei $A = (a_{ik})$ yra $[m \times s]$ formato matrica ir $B = (b_{kj})$ yra $[s \times n]$ formato matrica, tai **matricų** A ir B **sandauga** vadinama matrica $AB = C = (c_{ij})$, kurios formatas $\tau(C) = [m \times n]$, o kiekvienas elementas apskaičiuojamas pagal formulę

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Pastaba: sudauginti galima tik tokias dvi matricas, kurių pirmosios stulpelių skaičius lygus antrosios eilučių skaičiui.

VEIKSMAI SU MATRICOMIS



Pavyzdys. Sudauginkime matricas A ir B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SVARBU!

Matricų daugyba yra **nekomutatyvi**, t.y.

$$AB \neq BA$$

Tačiau yra ir tokios matricos, kurių sandauga $AB = BA$, tokios matricos vadinamos **komutuojančiomis**.

Pastaba: Komutuojančiomis gali būti tik kvadratinės matricos

Determinantu vadinamas skaičius, kuris priskiriamas kvadratinei matricai pagal tam tikrą taisyklę.

Matricos determinantą žymėsime $|A|$ arba $\det A$ arba Δ .

Kai $n = 1$, tai tuomet matrica yra pirmos eilės
ir matricos $A = (a_{11})$ determinantas $|a_{11}| = a_{11}$

Kai $n = 2$, tai tuomet matrica yra antros eilės
ir matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ determinantas
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

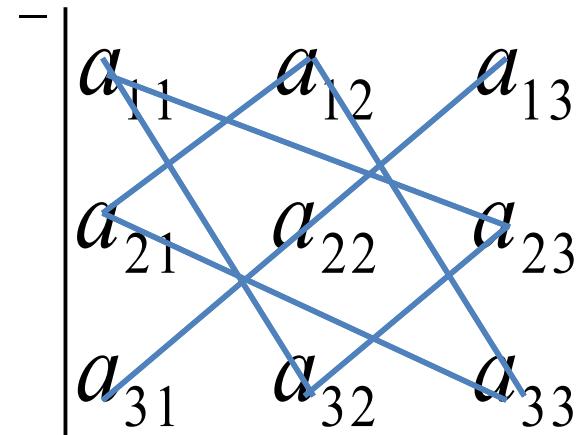
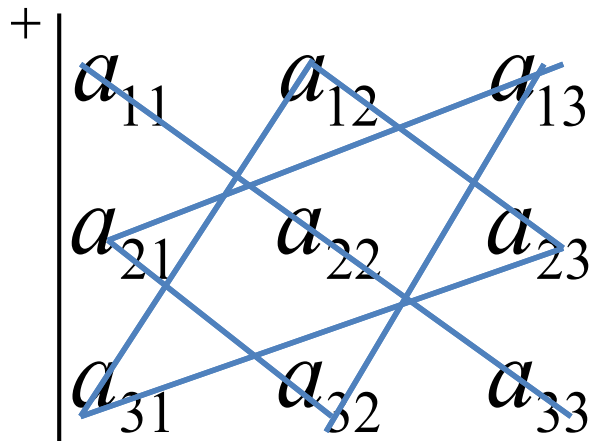
Kai $n = 3$, tai tuomet matrica yra trečios eilės

ir matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ determinantas lygus

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Trikampio taisyklė



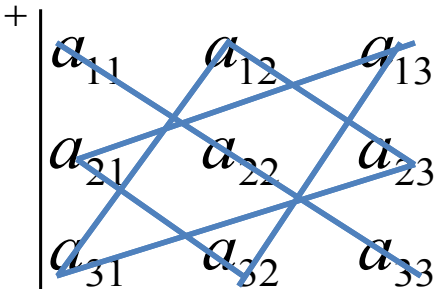
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

DETERMINANTAI

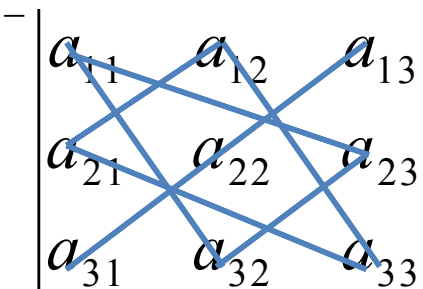
Pavyzdys. Apskaičiuokime determinantą:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Priminimas: $+$


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$-$


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

DETERMINANTAI

3 eilės determinantą galima skaičiuoti ir taip:

+	+	+	-	-	-
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{11}	a_{12}	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_{22}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{31}	a_{32}	

Apibrėžimas. Tarkime, turime determinantą. Elemento a_{ij} *minoru* vadinamas determinantas, kuris gaunamas išbraukus pradiniam determinantui i –ąją eilutę ir j –ąjį stulpelį. Minoras žymimas M_{ij}

Pavyzdys.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Apibrėžimas. Determinanto elemento a_{ij} *adjunktas* vadinamas to elemento minoras M_{ij} , padaugintas iš $(-1)^{i+j}$ ir žymimas A_{ij} , t.y. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Pavyzdys.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Apibrėžimas. Determinanto reikšmė laikoma, bet kurios jo eilutės(stulpelio) elementu ir tos elementus atitinkančių adjunktų sandaugų suma.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, j = \overline{1, n}$$

1. Matricos determinantas lygus jos transponuotos matricos determinantui.
2. Sukeitę dvi gretimas determinanto eilutes vietomis, gausime determinantą, kuris nuo to determinanto skiriasi tik ženklu.
3. Jei kurios nors determinanto eilutės elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinantą.
4. Determinantas, turintis dvi arba daugiau proporcingų eilučių, lygus nuliui.
5. Determinantas, kurio visi eilutės elementai lygūs nuliui, lygus nuliui.
6.
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix};$$
7. Jei prie bet kurios determinanto eilutės elementų pridėsime atitinkamus kitos eilutės elementus, padaugintus iš realiojo skaičiaus, determinanto reikšmė nepasikeis.

Apibrėžimas. Atvirkštine kvadratinės matricos A matrica vadinama matrica A^{-1} , tenkinanti lygybes: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$; čia E yra vienetinė matrica.

Skaičiavimo formulė:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

[Formulės išvedimas](#) ← Smalsiems ☺

n-tosios eilės kvadratinė matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

vadinama **neišsigimusiaja** (arba **reguliari**), kai $\det A \neq 0$.

Priešingu atveju, t. y. kai $\det A = 0$, ji vadinama išsigimusiaja.

Pastaba:

Matrica A turi atvirkštinę matricą tada ir tik tada, kai ji yra **reguliari** (**neišsigimusi**)!!!

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt