

2 PASKAITA

**TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SPRENDIMAS:
ATVIRKŠTINĖS MATRICOS METODU,
KRAMERIO METODU, GAUSO METODU.**

Apibrėžimas. Tiesine lygtimi su n nežinomųjų vadinama lygtis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

čia a_i , $i = \overline{1, n}$ lygties koeficientai, o b – lygties laisvasis narys.

Apibrėžimas. Lygčių sistema

[illegible]

vadinama nehomogenine tiesinių lygčių sistema su m lygčių ir n nežinomųjų. Čia a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ – sistemos koeficientai, b_i – laisvieji nariai.

Apibrėžimas. Skaičių rinkinys $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vadinamas **sistemos sprendiniu**, jeigu, įrašę juos vietoj nežinomųjų $x_1, x_2, \dots, x_n$ iš visų lygčių gauname tapatybes.

Jei sistema neturi sprendinių, tai ji vadinama **nesuderinta**, jeigu turi – **suderinta**.

Suderinta sistema vadinama **apibrėžta**, jei ji turi vienintelį sprendinį, ir **neapibrėžta**, jeigu turi daugiau kaip vieną.

Lygčių sistemą galima užrašyti matriciniu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

[illegible]

Jei turime n tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą $A \cdot X = B$, ir tos sistemos koeficientų matricos determinantas $|A| \neq 0$, tai sprendinį randame iš formulės

$$X = A^{-1}B.$$

Jei turime n tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą $A \cdot X = B$, ir tos sistemos koeficientų matricos determinantas $|A| \neq 0$, tai sprendinį randame iš formulės

$$X = A^{-1}B.$$

O jei lygčių sistema yra: $X \cdot A = B$, kaip rasti X ?

Jei turime n tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą $A \cdot X = B$, ir tos sistemos koeficientų matricos determinantas $|A| \neq 0$, tai sprendinį randame iš formulės

$$X = A^{-1}B.$$

O jei lygčių sistema yra: $A \cdot X \cdot B = C$, kaip rasti X ?

Jei turime n tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą $A \cdot X = B$, ir tos sistemos koeficientų matricos determinantas $\Delta \neq 0$, tai sprendinį randame taikydami formulę

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}$$

čia Δ_i — n -tosios eilės determinantas, gautas iš determinanto Δ pakeitus jo i -ąjį stulpelį laisvųjų narių stulpeliu.

Pavyzdys. Išspręsti lygčių sistemą Kramerio metodu:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

ATS: (3; 2; 2)

Priminimas: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}$

Jeigu sistemos $\Delta = |A| \neq 0$, tai sistema turi vienintelį sprendinį ir ji gali būti sprendžiama:

Atvirkštinės matricos,

Kramerio,

Gauso metodais.

Jei $\Delta = |A| = 0$ — sistema turi daug sprendinių ir ji sprendžiama tik **Gauso metodu.**

Dvi tiesinių lygčių sistemos vadinamos **ekvivalenčiomis**, jei jų sprendinių aibės sutampa.

Atliekant su lygčių sistema elementariusius pertvarkymus, sistema išlieka ekvivalenti.

Tiesinių lygčių sistemų **elementariaisiais pertvarkiais** vadiname:

- 1) sistemos lygčių sukeitimą vietomis,
- 2) sistemos lygties padauginimą iš nelygaus nuliui skaičiaus,
- 3) vienos sistemos lygties pridėjimą prie kurios nors kitos sistemos lygties.

Elementariųjų pertvarkymų pagalba pradinę sistemą pertvarkome į trapecinę lygčių sistemą

[illegible]

$$r \leq n, \tilde{a}_{ii} \neq 0, i = \overline{1, r}$$

Trapecinė lygčių sistema visada yra suderinta. Kai $r = n$ sistema turi vienintelį sprendinį, kai $r < n$, sistema yra neapibrėžta ir turi begalo daug sprendinių.

Iš paskutinės lygties išreiškiame nežinomąjį x_r :

$$x_r = \frac{\tilde{b}_r - \tilde{a}_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn}x_n}{\tilde{a}_{rr}}$$

ir statome jo išraišką į aukščiau esančią lygtį. Po to iš tos lygties išreiškiame nežinomąjį x_{r-1} .

Gautą išraišką statome į kitą lygtį ir t.t. iki gauname x_1 išraišką. Atlikę šią procedūrą gauname nežinomųjų $x_1, x_2, \dots, x_r$ išraiškas:

$$x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_r = \tilde{x}_r$$

čia $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$ yra nežinomųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$ tiesinės kombinacijos. Laisvai pasirinkę nežinomųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$ reikšmes $t_{r+1}, \dots, t_n$ gauname sistemos sprendinį:

$$(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, t_{r+1}, \dots, t_n)$$

Nežinomieji $x_1, \dots, x_r$ vadinami **baziniais**, o nežinomieji $x_{r+1}, \dots, x_n$ — **laisvaisiais**.

Pavyzdys. Gauso metodu išspręskime lygčių sistemas:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + 14x_2 + 21x_3 + 28x_4 = 35 \\ 8x_1 + 16x_2 + 24x_3 + 32x_4 = 40 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 15 \end{cases}$$

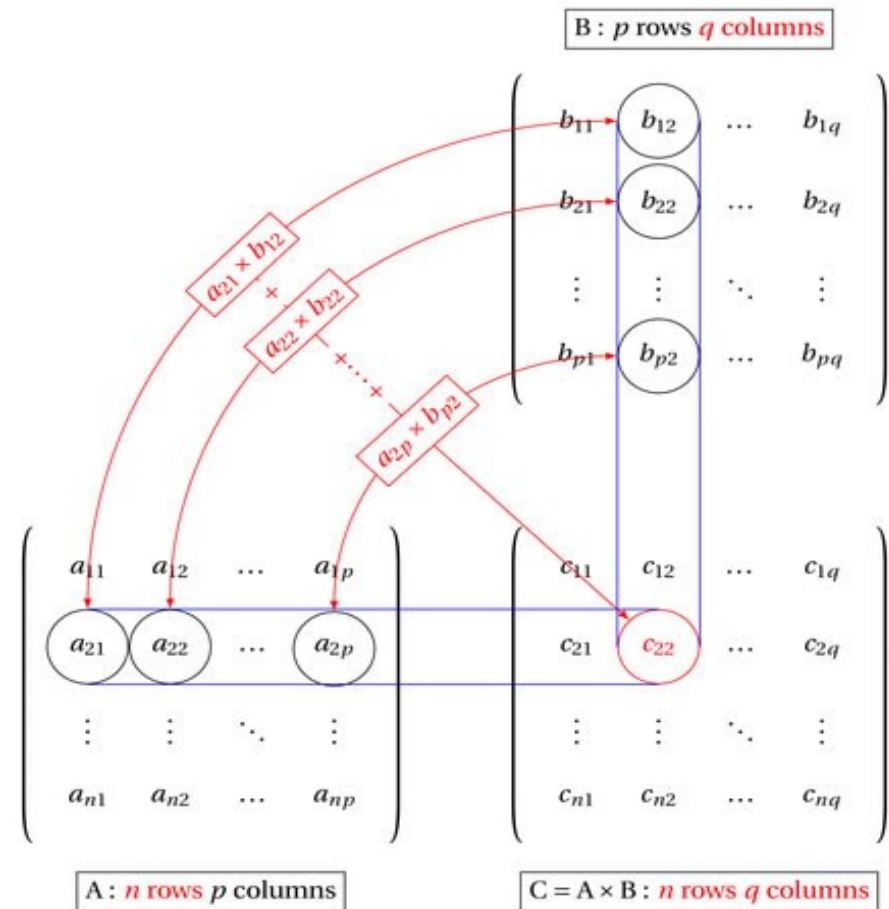
[illegible]

Jeigu sistemos $\Delta \neq 0$, tai sistema turi vienintelį sprendinį, jei $\Delta = 0$ – sistema turi daug sprendinių.

18

PRISIMINKIME

- Matricų daugybą:



- Determinantų skaičiavimą:

- ✓ 2 eilės:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

- ✓ 3 eilės: Trikampio taisyklė;

- ✓ 4 + eilės: Skleidimas adjunktais;

- Apskaičiuoti atvirkštinę matricą A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- Spręsti tiesines lygčių sistemas:
 - ✓ Atvirkštinės matricos metodu;
 - ✓ Kramèrio metodu;
 - ✓ Gauso metodu.

- Vektorius:
 - ✓ Tiesiniai veiksmai su vektoriumi;
 - ✓ Dviejų vektorių skaliarinė sandauga;
 - ✓ Dviejų vektorių vektorinė sandauga;
 - ✓ Trijų vektorių mišrioji sandauga;

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė
E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt