

3 PASKAITA

**VEKTORIAI. DVIEJŲ VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA.
DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA.
TRIJŲ VEKTORIŲ MIŠRIOJI SANDAUGA.**

- Dviejų vektorių vektorinė sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimo formulės išvedimas, geometrinės prasmės paaiškinimas.
- Trijų vektorių mišrioji sandauga: apibrėžimas, apskaičiavimo formulės išvedimas, geometrinė prasmė (įrodymas). Vektorių komplanarumas

VEKTORIUS



PRISIMINKIME

Apibrėžimas. Kryptinė atkarpa vadinama vektoriumi. Vektorius žymimas: $\overrightarrow{AB}$ arba $\vec{a}$.

Atstumas nuo vektoriaus pradžios iki galo vadinamas vektoriaus ilgiu arba modulių ir žymimas: $|\overrightarrow{AB}|$ arba $|\vec{a}|$.

Apibrėžimas. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami kolineariais, jeigu jie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse.

Vektorių kolinearumo sąlyga:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Apibrėžimas. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami komplanariais, jeigu jie yra vienoje plokštumoje arba lygiagrečiose plokštumose.

1. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

Apibrėžimas. Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus λ sandauga yra vektorius $\vec{b}$ kurio kryptis sutampa su $\vec{a}$ kryptimi, jei λ teigiamas ir yra priešinga $\vec{a}$ kryptčiai, jei λ neigiamas. Žymima: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Vektoriaus $\vec{b}$ ilgis lygus vektoriaus $\vec{a}$ ilgiui, padaugintam iš skaičiaus λ modulio, t.y. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Išvada: Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai jie susieti lygybe $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

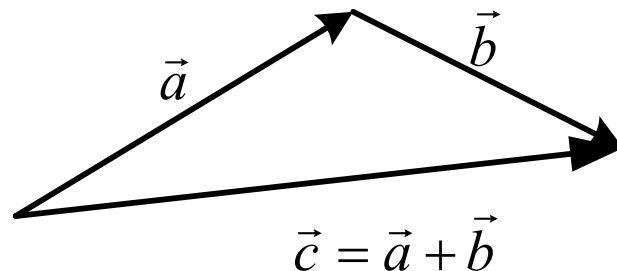
Apibrėžimas. Vektorius, kurio ilgis lygus 1, vadinamas vienetiniu vektoriumi. Žymėsime $\vec{a}^0$: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

2. Vektorių sudėtis

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma vadinamas vektorius $\vec{c}$, kuris jungia laužtės, sudarytos iš šių dviejų vektorių, pirmojo dėmens pradžią su paskutiniojo dėmens galu.

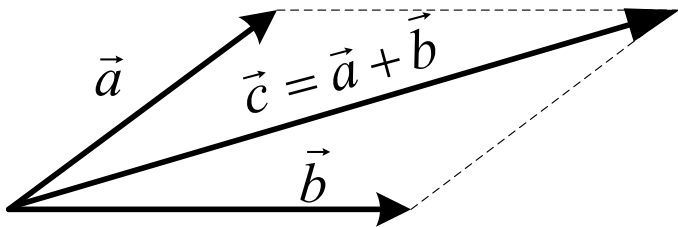
Vektorių suma žymima:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

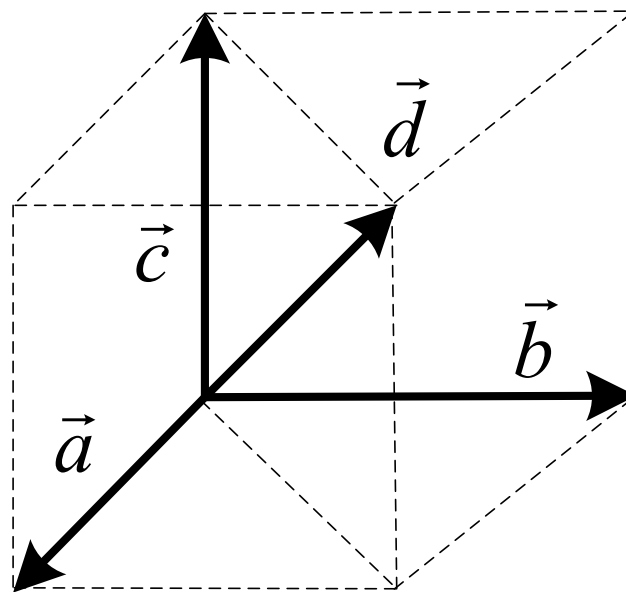


Vektorių sudėties taisyklės

Lygiagretainio taisyklė:

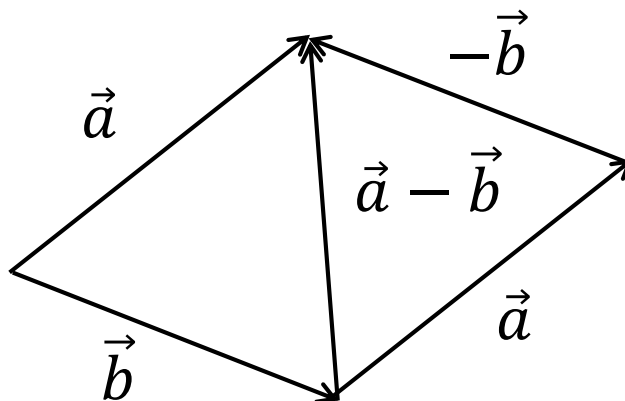


Gretasienio taisyklė: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



3. Vektorių atimtis

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vadinamas vektorius $\vec{c}$, kurį pridėjus prie vektoriaus $\vec{b}$, gaunamas vektorius $\vec{a}$.



Dekarto koordinačių sistema

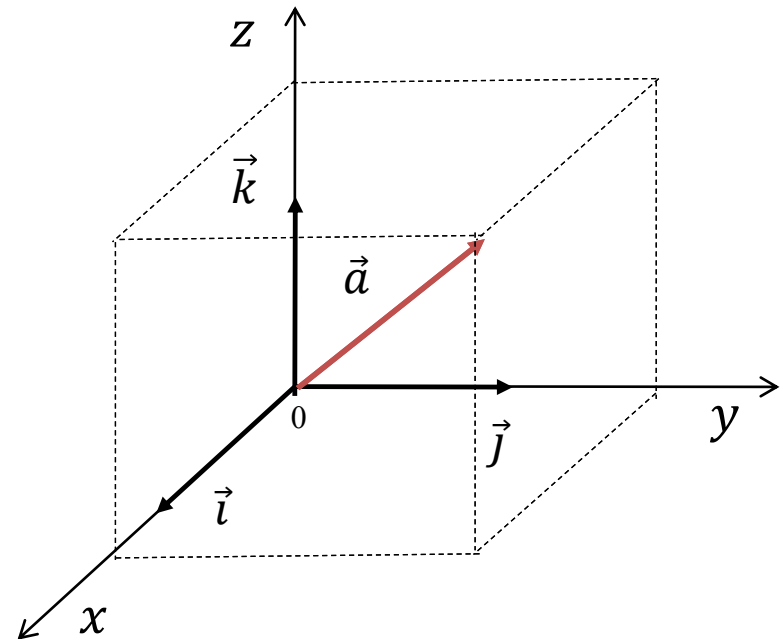
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

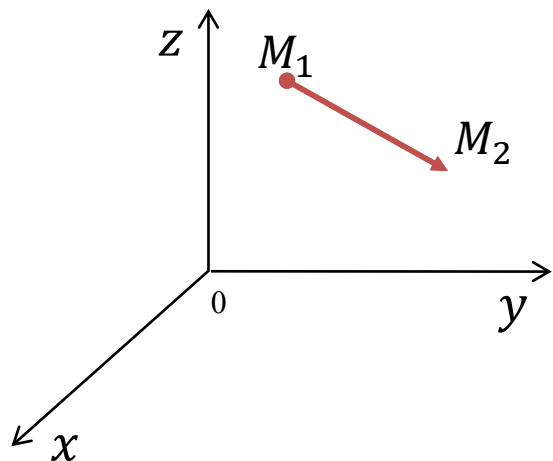
$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

$$a_x = pr_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha;$$

$$a_y = pr_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta;$$

$$a_z = pr_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma.$$





Nagrinėsime du taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Vektoriaus koordinatės :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Atstumas tarp šių taškų yra vektoriaus $\overrightarrow{M_1M_2}$ ilgis:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Apibrėžimas.

Vektoriaus $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ kampų α, β, γ su koordinačių ašimis Ox, Oy, Oz kosinusai vadinami **vektoriaus krypties kosinusais**.

Krypties kosinusų savybė:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Vienetinis vektorius:

$$\vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Apibrėžimas. Kampu tarp dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinamas mažiausias kampas tarp šiems vektoriams atitinkamai lygių vektorių, atidėtų iš vieno taško.

Kampas žymimas $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{b} \right)^{\wedge}$.

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus šių vektorių modulių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandaugai:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Bet kuriems nenuliniam vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir skaičiui λ teisingos savybės:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ arba $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

Paaškinimas (Apibrėžimas: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutatyvumo dėsnis)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributyvumo dėsnis)
- $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$
- Jei vektorius $\vec{a} \perp \vec{b}$, tai $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \leftarrow$ **Labai SVARBU**

DVIEJŲ VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA

Tarkime, kad stačiakampėje koordinačių sistemoje duoti du vektoriai:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

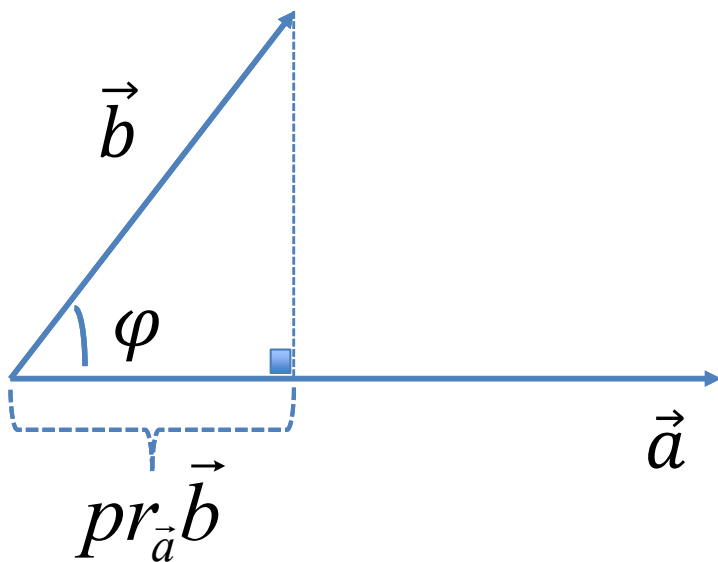
$$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

Tada dviejų vektorių skaliarinė sandauga:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} \\ &+ a_y b_z \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = \\ &= \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.} \end{aligned}$$

Vektoriaus $\vec{a}$ modulis lygus $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

- Vektoriaus $\vec{b}$ projekcija į vektorių $\vec{a}$:



$$\cos \varphi = \frac{pr_{\vec{a}} \vec{b}}{|\vec{b}|};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{pr_{\vec{a}} \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}^0.$$

- Kampas tarp vektorių:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- Apskaičiuojant darbą A , kurį atlieka jėga $\vec{F}$, veikdama materialųjį tašką kol jis nueina tiesės atkarpa kelią $|\vec{s}|$:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

čia φ – kampas tarp jėgos ir kelio kryptių.

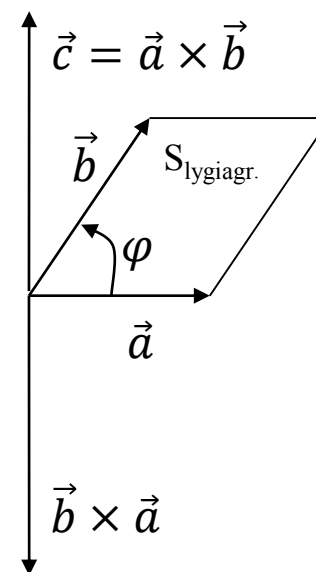
Vadinasi, darbas lygus kūną veikiančios jėgos ir to kūno poslinkio vektoriaus skaliarinei sandaugai.

DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA

DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorine sandauga $\vec{a} \times \vec{b}$ vadiname vektorių $\vec{c}$, tenkinantį tris sąlygas:

- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, taigi $\vec{c}$ statmenas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ plokštumai;
- $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{lyg} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$;
- vektoriaus $\vec{c}$ kryptis tokia, kad, žiūrint iš vektoriaus $\vec{c}$ galo, vektorius $\vec{a}$ sukamas prieš laikrodžio rodyklę sutampa su vektoriumi $\vec{b}$ pačiu trumpiausiu keliu.

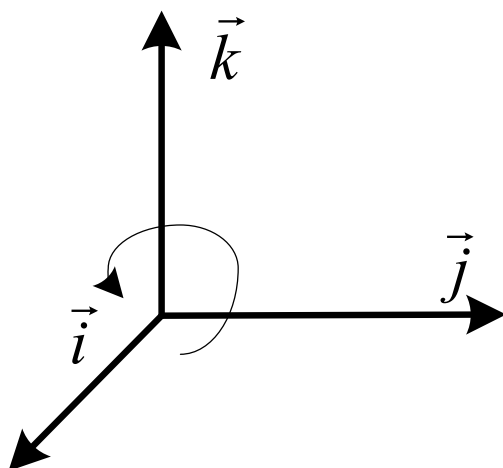


Bet kuriems nenuliniam vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir skaičiui λ teisingos savybės:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
- $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$,
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

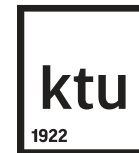
Pavyzdys. Sudauginkime $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.

DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



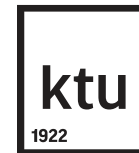
Tarkime, kad stačiakampėje koordinačių sistemoje duoti du vektoriai:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$
$$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\text{Tada } \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$



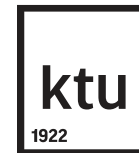
DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



$$\begin{aligned}\text{Tada } \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + \\ &+ a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + \\ &+ a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{0} + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_y \vec{0} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} \\ &- a_z b_y \vec{i} + a_z b_z \vec{0} = \\ &= a_y b_z \vec{i} - a_z b_y \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_x b_z \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.\end{aligned}$$



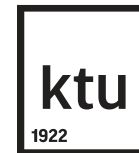
DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



$$\begin{aligned} & (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ & = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$



DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$$

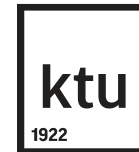
$$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

SVARBU!

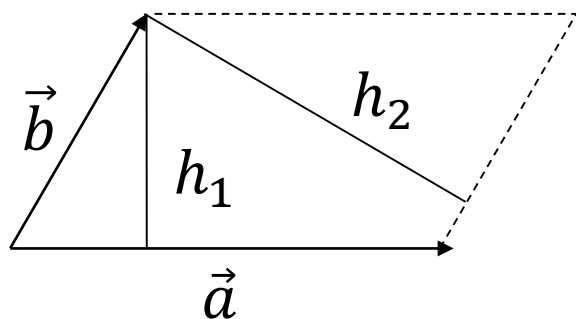


DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA



Pavyzdys. Duoti vektoriai $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$ ir $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$.
Rasti $\vec{a} \times \vec{b}$.

- Lygiagretainio plotas:

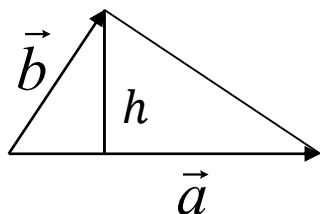


$$S_{lyg} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

$$h_1 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|},$$

$$h_2 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

- Trikampio plotas:



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad h = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA

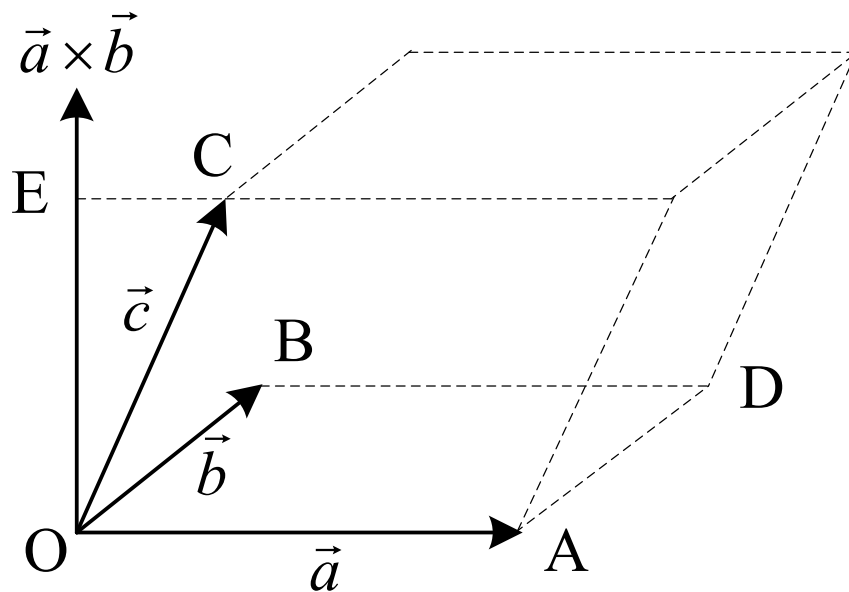
Apibrėžimas. Trijų vektorių mišriąją sandaugą vadinamas skaičius, gautas vektorinę sandaugą $\vec{a} \times \vec{b}$ skaliariškai padauginus iš vektoriaus $\vec{c}$.

Žymima: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA (Geometrinė prasmė)

Tarkime, kad vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra nekomplanarūs. Sudarykime iš jų gretasienį.



Gretasienio tūris lygus:

$$V = S_{OADB} \cdot OE$$

Tuo tarpu pagrindo plotas:

$$S_{OADB} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

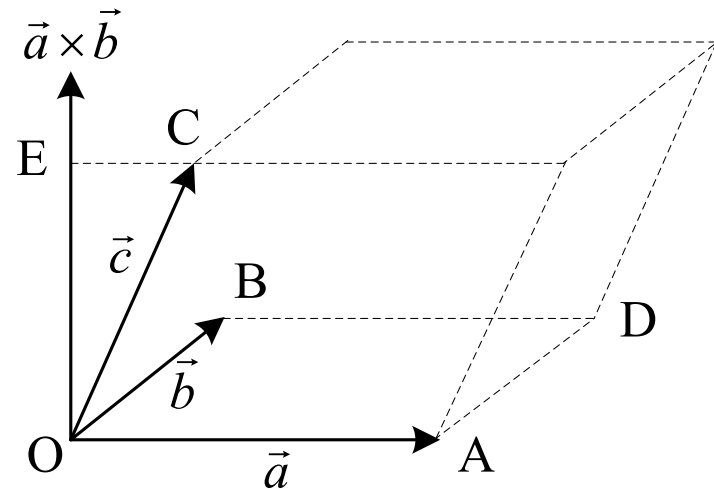


MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA (Geometrinė prasmė)

Gretasienio aukštinės OE ilgis yra lygus vektoriaus $\vec{c}$ projekcijai į vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$, t.y.

$$OE = pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Tai



$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



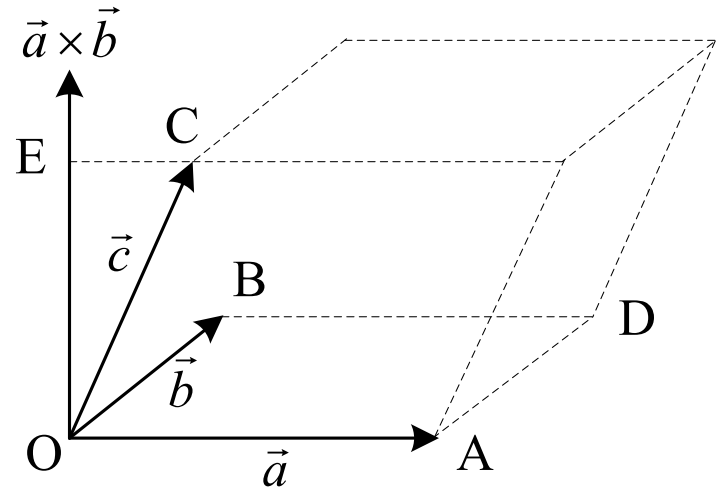
MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA(Geometrinė prasmė)

Skaliarinė sandauga tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ gali įgyti tiek neigiamą, tiek teigiamą reikšmę. Kadangi tūris matuojamas teigiamais vienetais, tai

$$V_{gret} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Piramidės tūris:

$$V_{pir} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



SVARBU!



Jei vektoriai $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ yra komplanarūs, tai vektorius $\vec{c}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaromoje plokštumoje, todėl

$$pr_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = 0.$$

Vadinasi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji. Tada $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, o drauge ir $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.



Bet kuriems nenuliniam vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ teisingos savybės:

- Būtina ir pakankama trijų vektorių **komplanarumo**

sąlyga: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \leftarrow$ **SVARBU!!!**

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ kai kampas tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ smailus.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ kai kampas tarp vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir $\vec{c}$ bukas.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} =$
 $= -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}.$

MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA

Tarkime, kad stačiakampėje koordinačių sistemoje duoti trys vektoriai $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

Iš vektorinės sandaugos žinome, kad

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Daugindami vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ skaliariškai iš $\vec{c}$, gauname:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$



MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA



$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\},$$

$$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\},$$

$$\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

SVARBU!



- Dviejų vektorių skaliarinė sandauga;
- Dviejų vektorių vektorinė sandauga;
- Trijų vektorių mišriąją sandaugą;

- Bendroji plokštumos lygtis.
- Taško atstumas iki plokštumos.
- Tiesės erdvėje kanoninės, parametrinės lygtys.
- Tiesės, einančios per du taškus, lygtis.
- Bendrosios tiesės erdvėje lygtys.

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė
E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt