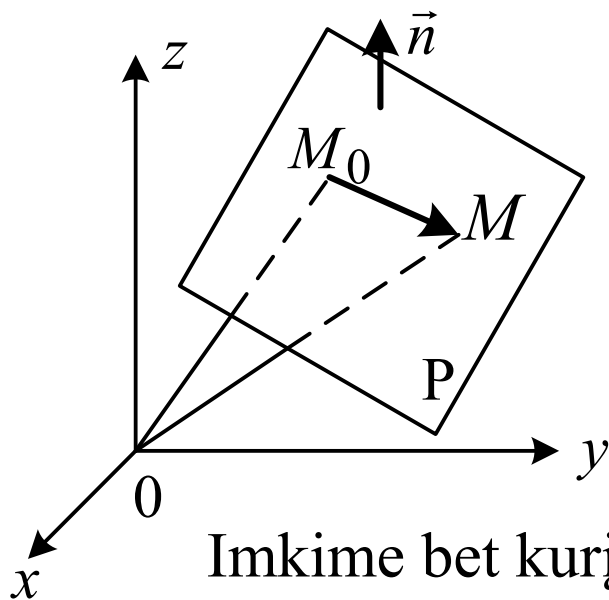


4 PASKAITA

**BENDROJI PLOKŠTUMOS LYGTIS.
TIESĖS ERDVĖJE LYGTIS (KANONINĖS, PARAMETRINĖS).
BENDROSIOS TIESĖS ERDVĖJE LYGTYS.**

- Bendrosios plokštumos lygties išvedimas.
- Normalės vektorius.
- Tiesės erdvėje kanoninių ir parametrinių lygčių išvedimas.
- Tiesės krypties vektorius.
- Tiesės, einančios per du taškus, lygtis (su išvedimu).



Plokštumos padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu yra visiškai nusakyta, kai žinomas:

- jos taškas $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- ir jai statmenas vektorius $\vec{n} = (A, B, C)$ – **plokštumos normalusis vektorius**

Imkime bet kurį kitą plokštumos tašką $M(x, y, z)$.

Kadangi $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, iš dviejų vektorių statmenumo sąlygos gauname **vektorinę plokštumos lygtį**:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$



Įrašę vektorių koordinates ir sudauginę jas skaliariškai, gauname

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Atskliaudę skliaustus ir pažymėję

$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D,$$

gauname **bendrąją plokštumos lygtį:**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Pastaba. Ši lygtis turi be galo daug sprendinių (t.y., plokštumai priklauso be galo daug taškų).



Pavyzdys. Plokštuma eina per tašką $M_0(1; 0; 3)$ ir yra statmena vektoriui $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Užrašykite plokštumos lygtį.

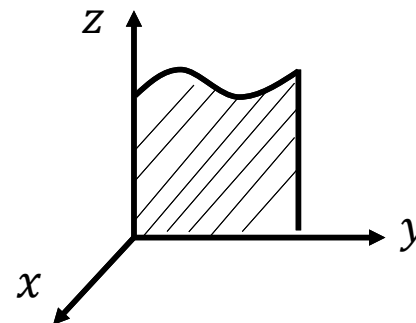
$$\text{Ats: } 3x - 2y + z - 6 = 0$$

Keletas atskirų atvejų:

- Jei $D = 0$, tai plokštuma eina per koordinatinių pradžios tašką.
- Jei A, B, C nekinta, o koeficientas D kinta, gauname lygiagrečių plokštumų šeimą.
- Jei $C = 0$, tai $Ax + By + D = 0$, ir gauta plokštuma lygiagreti Oz ašiai (t.y. kokio kintamojo lygtyje nėra, tokiai ašiai plokštuma yra lygiagreti).
- Jei $C = 0$ ir $B = 0$, tai $Ax + D = 0$, ir gauta plokštuma yra lygiagreti yOz plokštumai (t.y. Jei nėra dviejų kintamųjų, tai lygiagreti atitinkamai plokštumai).

Keletas atskirų atvejų:

- Jei $B = 0$, $C = 0$ ir $D = 0$, tai $Ax = 0$, ir gauta plokštuma sutampa su koordinatine plokštuma yOz .



Kiti galimi atvejai nagrinėjami analogiškai.

KAMPAS TARP DVIEJŲ PLOKŠTUMŲ

Tarkime, duotos dvi plokštumos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ ir } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

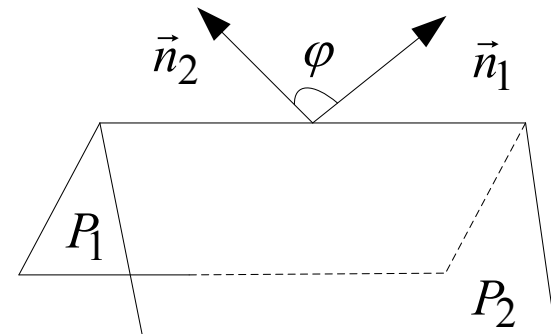
kurių normalės vektoriai atitinkamai lygūs:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \text{ ir } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Kampas tarp dviejų plokštumų

(tai kampas tarp jų normalės vektorių):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



KAMPAS TARP DVIEJŲ PLOKŠTUMŲ

Dvi plokštumos yra **statmenos**, kai

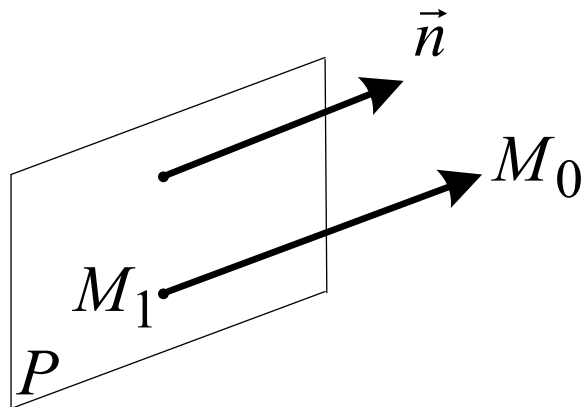
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Dvi plokštumos yra **lygiagrečios**, kai

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

TAŠKO ATSTUMAS IKI PLOKŠTUMOS

Tarkime, kad duota plokštuma $Ax + By + Cz + D = 0$ ir taškas $M_0(x_0, y_0, z_0)$ šalia jos. Apskaičiuosime šio taško atstumą iki plokštumos.



Tarkime, kad taškas $M_1(x_1, y_1, z_1)$ yra taško M_0 projekcija plokštumoje. Tada vektorius $\overrightarrow{M_1M_0}$ yra kolinearus normalės vektoriui $\vec{n}$.

Be to, vektoriaus $\overrightarrow{M_1M_0}$ ilgis lygus taško atstumui iki plokštumos.

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo ($\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$), gauname

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = \pm |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}|$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0} = \pm |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1 M_0}|$$

Taigi

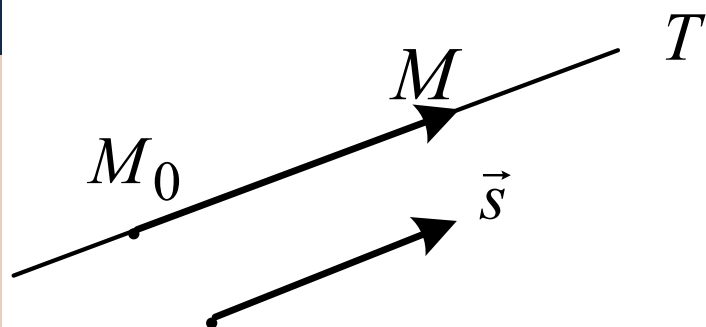
$$d = |\overrightarrow{M_1 M_0}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0}|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

arba

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

čia $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$



Tiesę erdvėje galima nusakyti, kai yra žinomas:

- jos taškas $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- ir jai lygiagretus vektorius $\vec{s} = (l, m, n)$ – **tiesės krypties vektorius**.

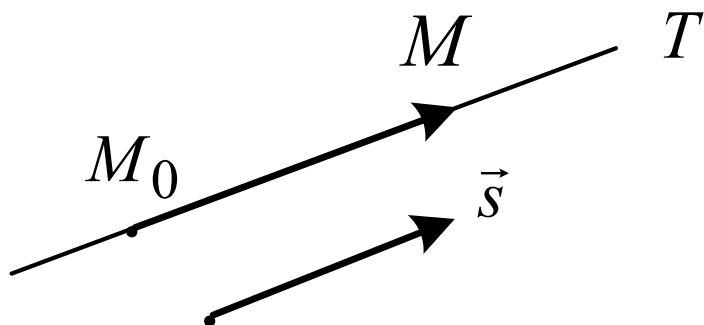
Imkime bet kurį tiesės tašką $M(x, y, z)$.

Kadangi $\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M}$, tai $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, čia $t \in R$ – parametras.

Tai **vektorinė tiesės lygtis**.



TIESĖS ERDVĖJE PARAMETRINĖS LYGTYS

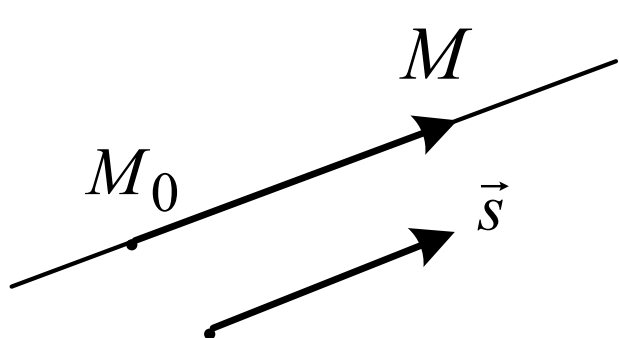


Užrašę lygtį $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ koordinatėmis, gauname **tiesės erdvėje parametrines lygtis**:

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$



Iš



$$T \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \text{ lygybės išreiškė parametą}$$

t ir sulyginę gautųjų lygybių dešiniąsias puses, gauname **kanonines tiesės lygtį**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Pastaba. Kanoninė lygtis turi prasmę ir tuo atveju, kai kuri nors iš krypties vektoriaus koordinačių lygi nuliui.



Pavyzdys. Raskite tiesės lygtį, kuri eina per tašką $M_0(1; 2; 3)$ ir yra statmena plokštumai $2x - 3y + z + 2 = 0$.

$$\text{Ats: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

Lygties sudarymas:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ bei $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – taškai esantis tiesėje.

$M(x, y, z)$ – pasirenkame bet kurį tašką, priklausančią tiesei.

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

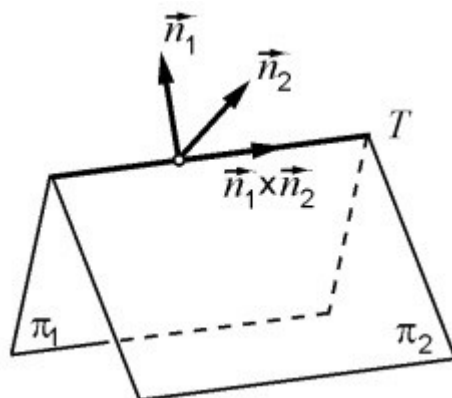
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Kadangi $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, tai

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$



Teisė erdvėje gali būti gauta susikirtus 2 plokštumoms:

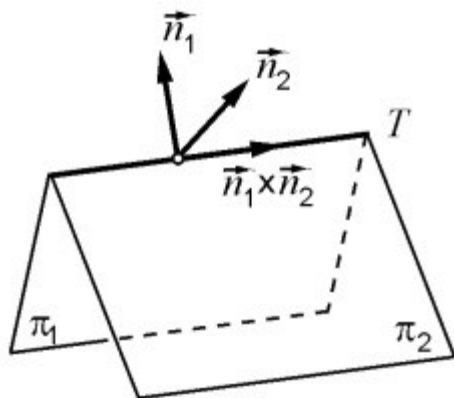


$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} - \text{tiesės bendroji lygtis}$$

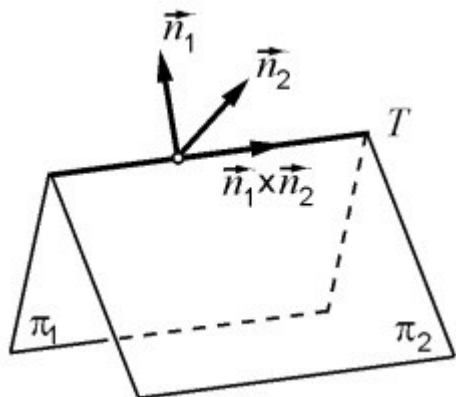
Bendrąją tiesės lygtį pakeisime kanonine lygtimi:

- surandame vieną atskirąją lygčių sistemos sprendinį ir turime vieną tiesės tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- surandame tiesės krypties vektorių $\vec{s}$: kadangi tiesė yra statmena ją sudarančių plokštumų normaliesiems vektoriams $\vec{n}_1$ ir $\vec{n}_2$, tai iš vektorinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad tiesės krypties vektoriumi galime laikyti vektorių:

$$\vec{s} = (l, m, n) = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$



BENDROSIOS TIESĖS ERDVĖJE LYGTYS



$$\vec{s} = (l, m, n) = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

gauname, kad $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

Taigi, kanoninė lygtis bus tokia:

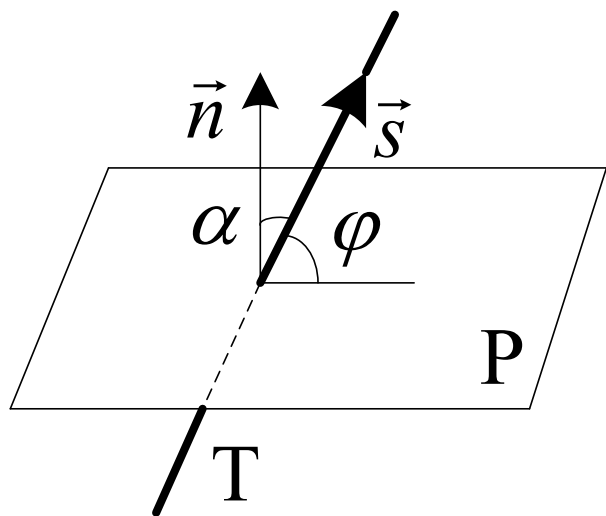
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

Tarkim, tiesė T nusakoma kanoninėmis lygtimis

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \text{ o plokštuma } P - \text{lygtimi}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$



Kampu φ tarp tiesės T ir plokštumos P vadiname kampą tarp tos tiesės ir jos projekcijos plokštumoje P .

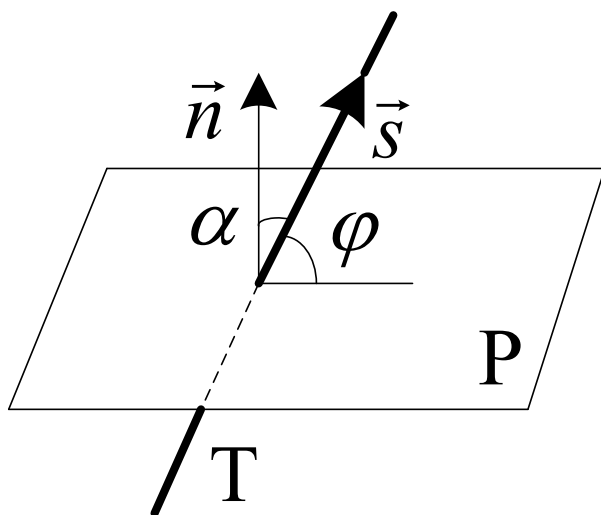
Kadangi $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$, tai

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi;$$

čia α kampas tarp tiesės T krypties vektoriaus

$\vec{s} = (l, m, n)$ ir plokštumos P normalės vektoriaus $\vec{n} = (A, B, C)$

Iš vektorių $\vec{n}$ ir $\vec{s}$ skaliarinės sandaugos išplaukia, kad



Tada

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

SVARBU!!!!

Kai $T \parallel P$, tai $\vec{n} \perp \vec{s}$, todėl $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$.

Taigi tiesės ir plokštumos **lygiagretumo sąlyga**:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Kai $T \perp P$, tai $\vec{n} \parallel \vec{s}$, todėl jų koordinatės yra proporcingos. Tai tiesės ir plokštumos **statmenumo sąlyga**:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$



Pavyzdys. Su kokiomis parametru A ir n reikšmėmis tiesė

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{n}$$

yra statmena plokštumai

$$Ax + 2y - 6z + 1 = 0.$$

- Bendroji plokštumos lygtis.
- Taško atstumas iki plokštumos.
- Tiesės erdvėje kanoninės ir parametrinės lygtys.
- Tiesės, einančios per du taškus, lygtis.
- Bendrosios tiesės erdvėje lygtys.
- Kampas tarp tiesės ir plokštumos.

- Antros eilės kreivės:
 - ✓ Apskritimas;
 - ✓ Elipsė
 - ✓ Hiperbolė
 - ✓ Parabolė

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė
E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt