

5 PASKAITA

**ANTROS EILĖS KREIVĖS:
APSKRITIMAS, ELIPSĖ, HIPERBOLĖ, PARABOLĖ.**

- Antros eilės kreivės (apskritimas, elipsė, hiperbolė, parabolė):
 - ✓ apibrėžimai,
 - ✓ kanoninės lygtys,
 - ✓ brėžiniai (**Mokėti kreives nubrėžti!!!**),
 - ✓ pagrindinės charakteristikos.

Antros eilės kreivėmis vadinamos kreivės, kurių lygtys yra antrojo laipsnio kintamųjų x ir y atžvilgiu. Bendras antrojo laipsnio lygties x ir y atžvilgiu pavidalas yra:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

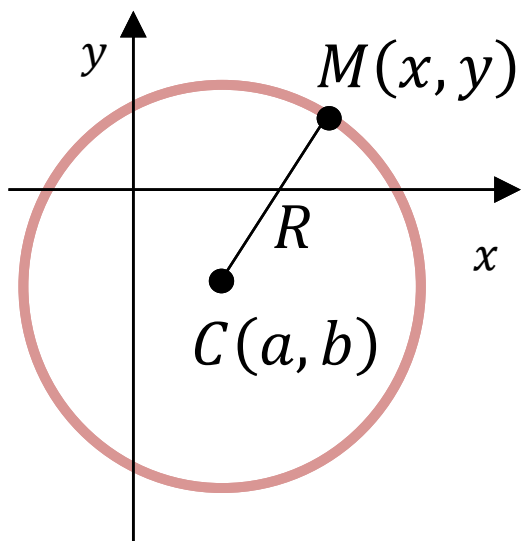
Kai $B = 0$:

$A \cdot C > 0$, tai ši lygtis reiškia elipsę;

$A \cdot C < 0$, tai ši lygtis reiškia hiperbolę;

$A = 0$ (arba $C = 0$), tai ši lygtis reiškia parabolę;

$A \cdot C > 0$ ir $A = C$, tai gauname atskirą elipsės atvejį – apskritimą.



Apibrėžimas. Apskritimu vadinama aibė plokštumos taškų, kurių kiekvienas vienodai nutolęs nuo pastovaus taško.

Pastovus taškas vadinamas **apskritimo centru**, o apskritimo taško atstumas iki centro – **spinduliu**.



Užrašysime apskritimo lygtį.

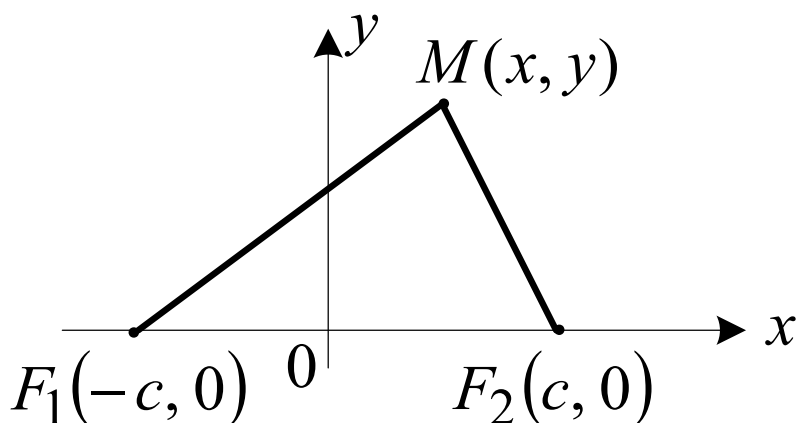
Tarkime, kad centras yra taške $C(a, b)$ o spindulys lygus R . Imame bet kurį apskritimo tašką $M(x, y)$. Pagal apibrėžimą

$$R = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Tai pakėlę abi lygybės puses kvadratu, gauname kanoninę apskritimo lygtį:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Apibrėžimas. Elipse vadinama aibė plokštumos taškų, kai kiekvieno taško atstumų iki dviejų pastovių taškų suma yra pastovus dydis, lygus $2a$ ($|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$).



Pastovius taškus F_1 ir F_2 vadiname **elipsės židiniais**.

[Elipsės braižymas](#)

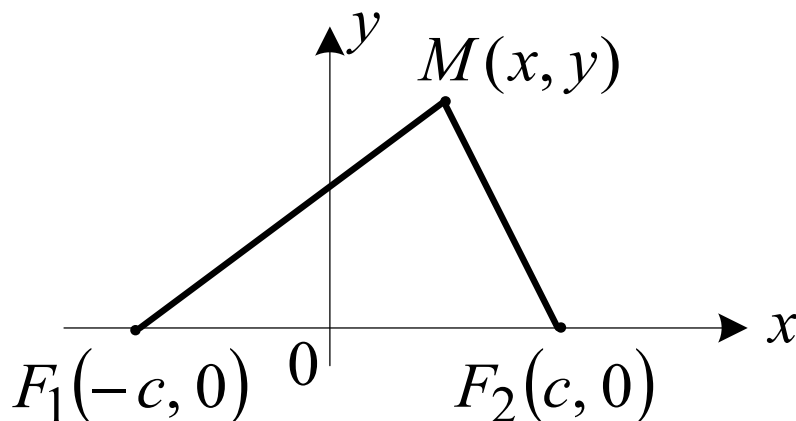


ELIPSĖ

Parašysime elipsės lygtį:

tarkime, kad židiniai yra taškuose $F_1(-c, 0)$ ir $F_2(c, 0)$.

Imkime bet kokią elipsės tašką $M(x, y)$.



Pagal apibrėžimą:

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a;$$

čia $2a > 2c$ arba $a > c$.

Gauname

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Pertvarkome

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Pakeliam abi puses kvadratu ir pritaikom formulę

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gauname:

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= \\ &= 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad |:4$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Ir vėl pakeliam abi puses kvadratu:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

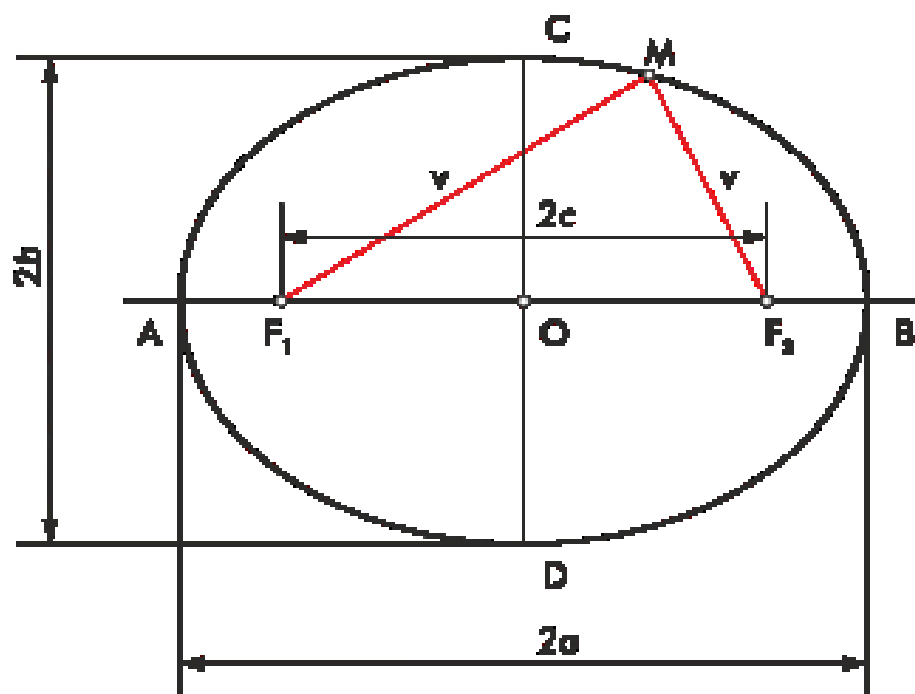
Pažymėkime $a^2 - c^2 = b^2$, gauname:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad |:a^2b^2 \neq 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{— kanoninė elipsės lygtis.}$$

ELIPSĖ

Kadangi $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ir $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, tai $|x| \leq a$, $|y| \leq b$,
arba $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$2c$ – atstumas tarp židinių

$2a$ – didžioji ašis

$2b$ – mažoji ašis

$a^2 = b^2 + c^2$ –
ryšys tarp parametrų

$$(c^2 = a^2 - b^2)$$

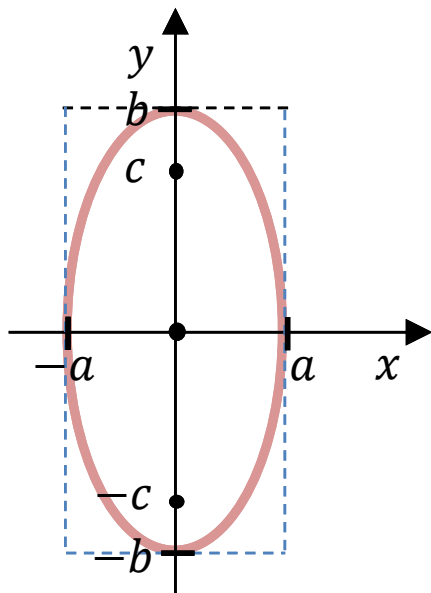


ELIPSĖ

Elipsės ištęstumą apibūdina ekscentricitetas $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 < \varepsilon < 1$).

Kai $\varepsilon = 0$, gauname apskritimą.

Kai $\varepsilon = 1$, gauname atkarpą, sutampančią su didžiąja ašimi.



Pastaba.

Jei elipsės kanoninėje lygtyje

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b > a,$$

tai elipsės židiniai yra Oy ašyje,

$$\text{be to } \varepsilon = \frac{c}{b} \text{ ir } b^2 = a^2 + c^2.$$



Pavyzdys. Parašykite elipsės, kurios židiniai yra Ox ašyje, kanoninę lygtį, jei jos mažoji ašis lygi 10, o ekscentricitetas lygus $\frac{12}{13}$.

ATS: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

Pavyzdys. Kokią antros eilės kreivę apibūdina ši lygtis $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$? Raskite šios kreivės židinius.

Priminimas(elipsė): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \varepsilon = \frac{c}{a}, c^2 = a^2 - b^2$

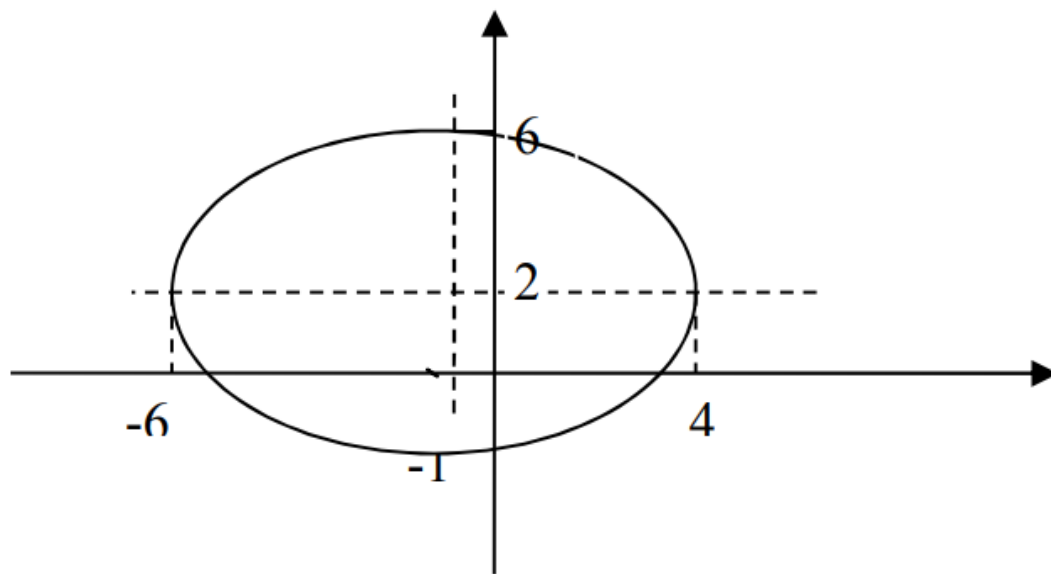
ELIPSĖ

Kai elipsės centras yra taške $(x_c; y_c)$:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

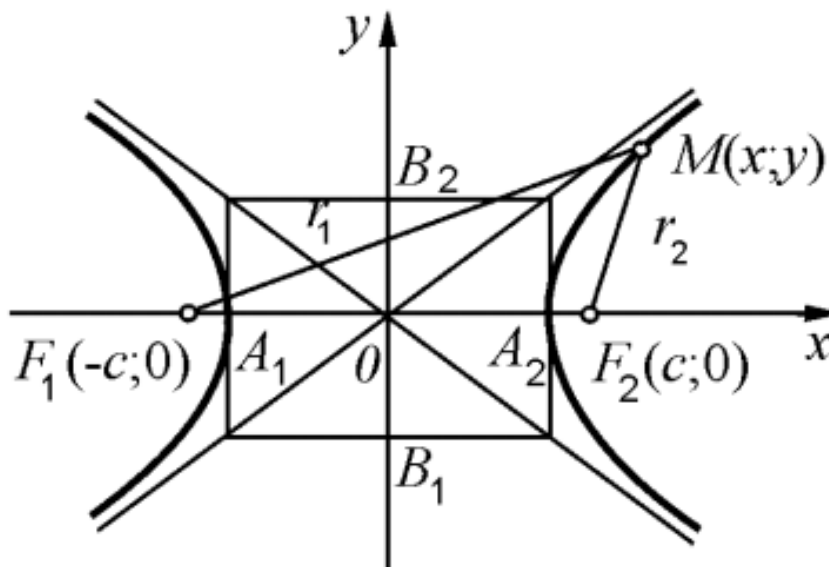
Pavyzdys.

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$



Apibrėžimas. Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų, kai kiekvieno taško atstumų iki dviejų pastovių taškų skirtumas yra pastovus dydis, lygus $\pm 2a$ ($|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = \pm 2a$).

Pastovūs taškai F_1 ir F_2 vadinami **hiperbolės židiniais**.

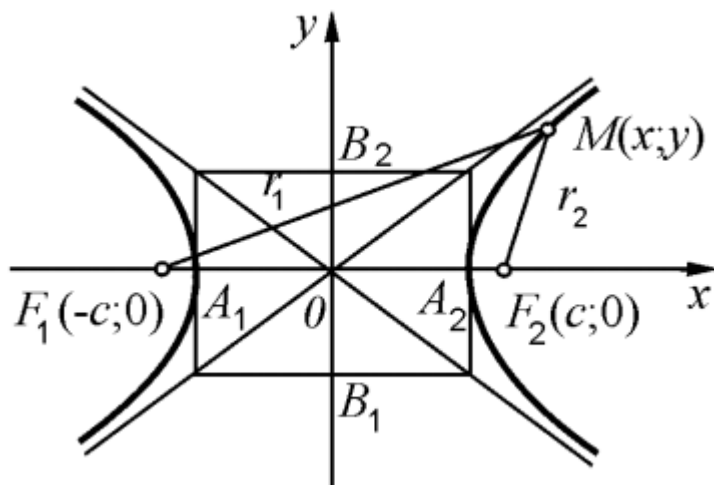


HIPERBOLĖ

Parašysime hiperbolės lygtį:

tarkime, kad židiniai yra taškuose $F_1(-c, 0)$ ir $F_2(c, 0)$.

Imkime bet kokį elipsės tašką $M(x, y)$.



Pagal apibrėžimą

$$|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = \pm 2a$$

Taigi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

čia $2a < 2c$ arba $a < c$.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Pertvarkome lygybę

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad |:4$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

HIPERBOLĖ

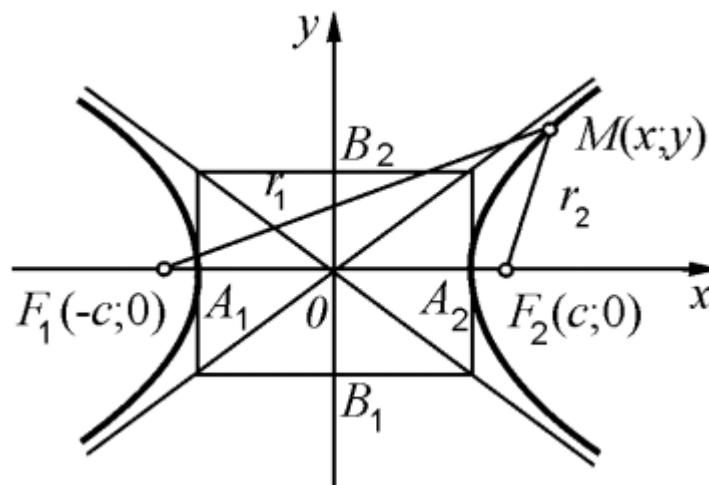
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Pažymėkime $a^2 - c^2 = -b^2$,

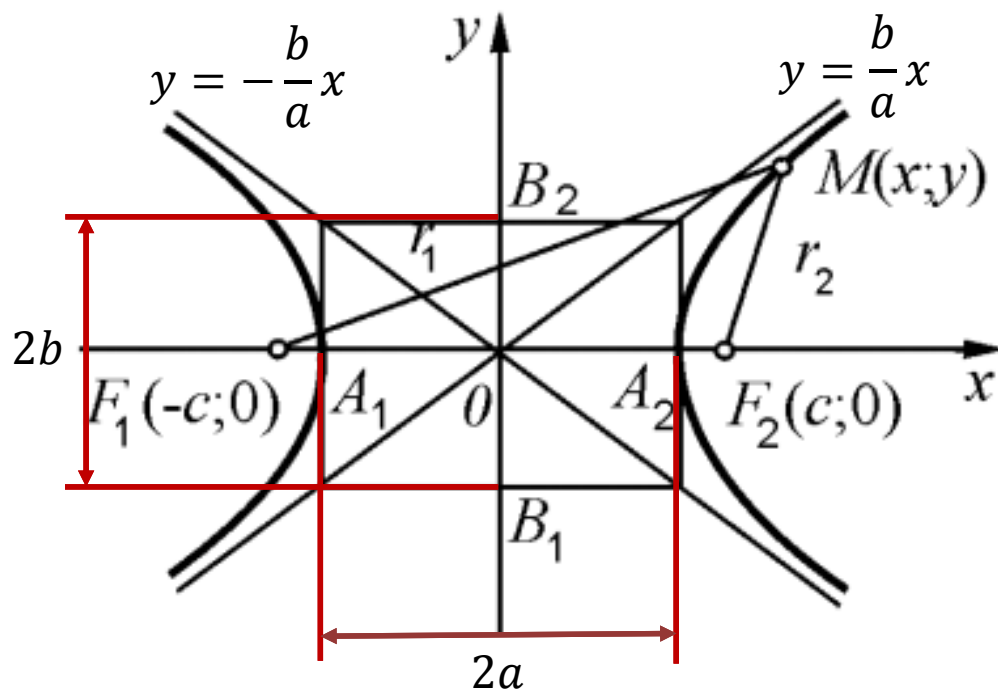
tada $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \mid : (-a^2b^2) \neq 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — kanoninė hiperbolės lygtis.}$$

Kadangi $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, tai $|x| \geq a$.



HIPERBOLĖ



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2$ –
ryšys tarp parametrų.

Tiesės $y = \pm \frac{b}{a}x$ –
vadinamos hiperbolės
asimptotėmis

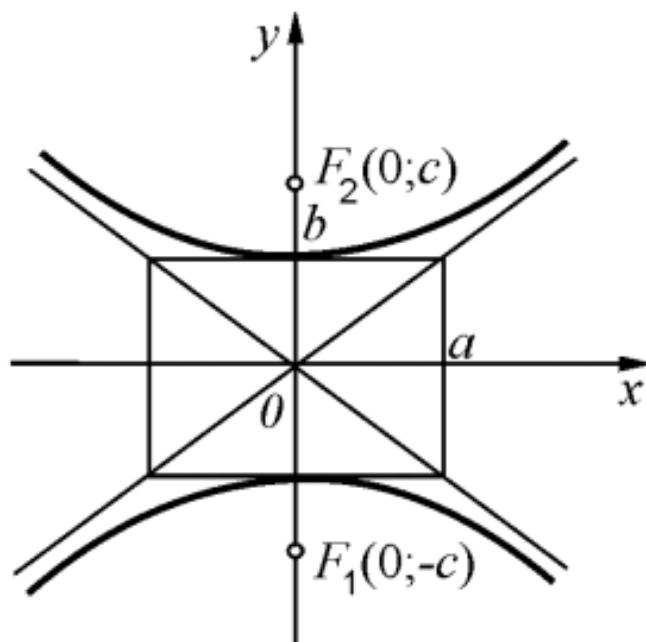
$2a$ – realioji ašis

$2b$ – menamoji ašis



HIPERBOLĖ

Hiperbolės ištęstumą apibūdina **ekscentricitetas** $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$



Pastaba. Hiperbolės

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

židiniai yra Oy ašyje.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \right)$$



Pavyzdys. Parašykite hiperbolės, kurios židiniai yra Ox ašyje, kanoninę lygtį, jei atstumas tarp židinių lygus 6, o ekscentricitetas lygus $\frac{3}{2}$.

Pavyzdys. Kokią antros eilės kreivę apibūdina ši lygtis $-4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$? Raskite šios kreivės židinius.

Priminimas(hiperbolė): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \varepsilon = \frac{c}{a}, c^2 = a^2 + b^2$

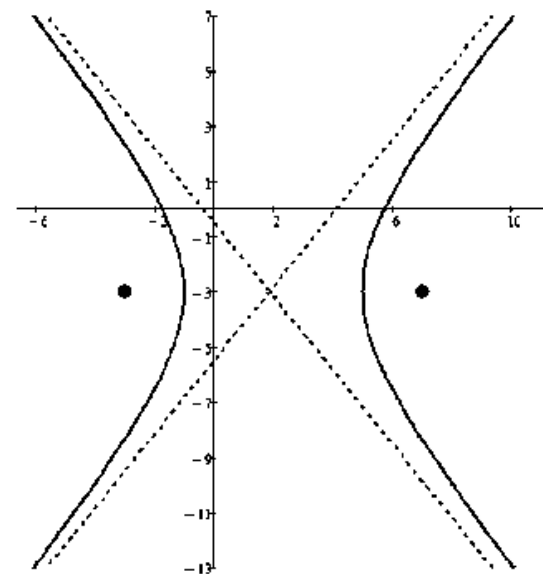
HIPERBOLĖ

Kai hiperbolės centras yra taške $(x_c; y_c)$:

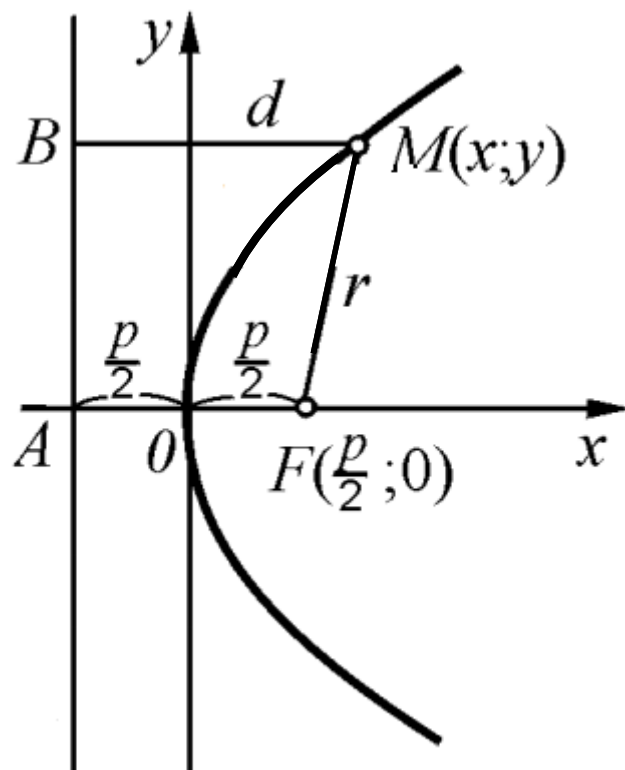
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

Pavyzdys.

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$



Apibrėžimas. Parabolė vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško ir duotosios tiesės. Duotasis taškas F vadinamas **židiniu**, o duotoji tiesė – **direktrise**.



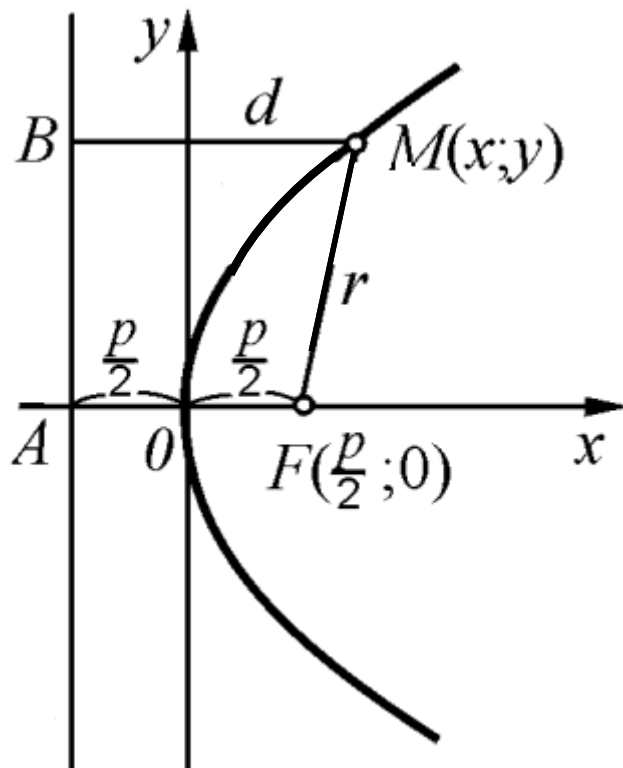
Parašysime parabolės lygtį: tarkime, kad židinytis yra taške $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, o jo atstumas iki direktrės lygus $p > 0$. Tada direktrės lygtis $x = -\frac{p}{2}$.

$$x = -\frac{p}{2}$$



PARABOLĖ

Pagal apibrėžimą $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{FM}|$ arba



$$x = -\frac{p}{2}$$

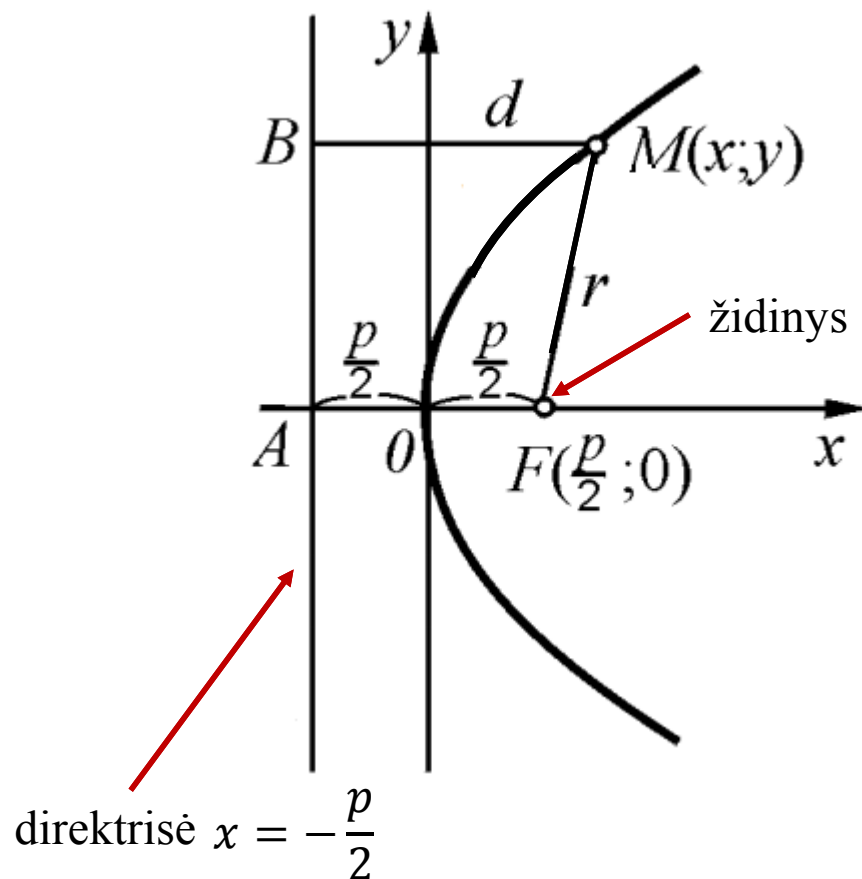
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2}$$

Pakeliam abi puses kvadratu:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$y^2 = 2px$ – **kanoninė parabolės lygtis.**

PARABOLĖ



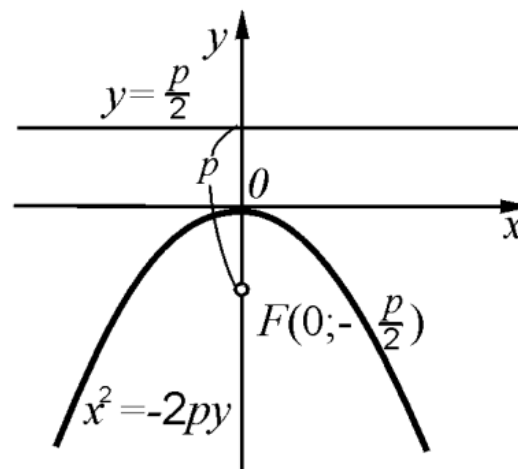
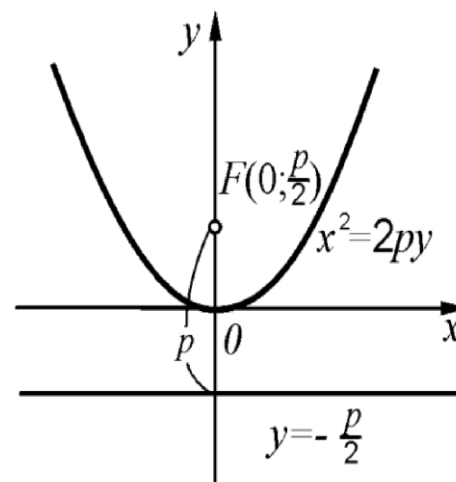
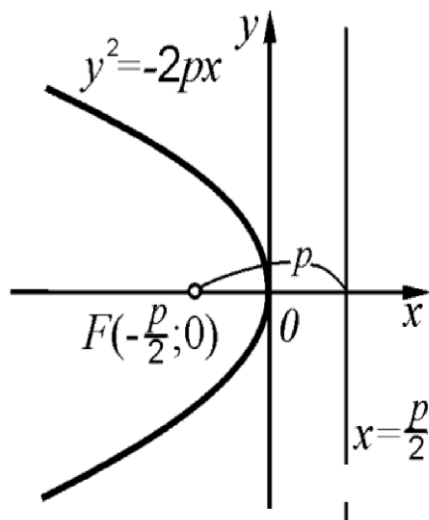
$$y^2 = 2px$$

$p > 0$ – parabolės parametras,
 Ox – parabolės ašis,
 $O(0,0)$ – parabolės viršūnė,
 $F(\frac{p}{2}; 0)$ – židinys.



PARABOLĖ

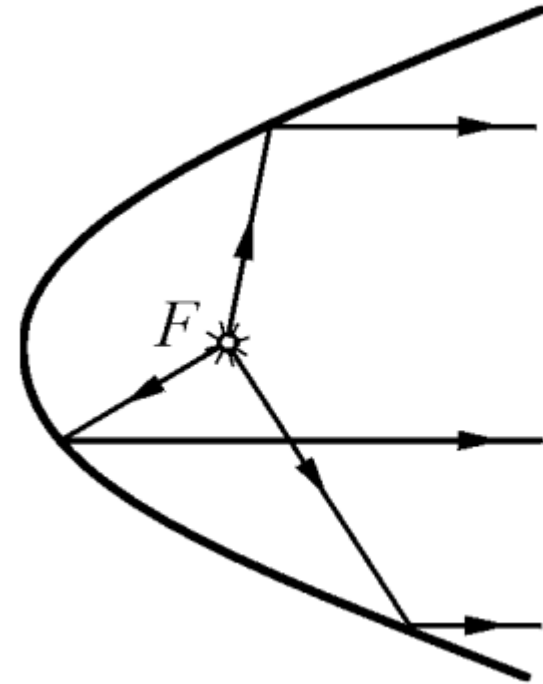
Kiti atvejai:



PARABOLĖ

Parabolė turi įdomią optinę savybę. Sakykime, kad parabolės židinyje F yra taškinis šviesos šaltinis.

Tada visi spinduliai, išėję iš židinio ir atsispindėję nuo veidrodinio parabolės „paviršiaus“, bus lygiagretūs su parabolės simetrijos ašimi.



Gautoji optinė parabolės savybė taikoma technikoje, konstruojant teleskopus, parabolines antenas, automobilių žibintus, lazerius ir kt.



Curved mirrors
reflect solar energy to
a cooking platform

Pavyzdys. Raskite parabolės $y^2 = 12x$ židinį ir direktrisės lygtį.

Pavyzdys. Užrašykite kreivę $y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ kanoniniu pavidalu ir ją nubrėžkite.

Priminimas(parabolė): $y^2 = 2px$; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$; $x = -\frac{p}{2}$

- Funkcijos sąvoka
- Išreikštinės ir neišreikštinės funkcijos.
- Hiperbolinės funkcijos.
- Parametrinės kreivių lygtys:
 - ✓ Apskritimo,
 - ✓ Elipsės,
 - ✓ Cikloidės
- Polinė koordinačių sistema

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt