

7 PASKAITA

FUNKCIJOS RIBA.
APRĖŽTOJI FUNKCIJA.
NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS.
NEAPRĖŽTIEJI REIŠKINIAI.



FUNKCIJOS RIBA TAŠKE

Pavyzdys. Ištirsime kokias reikšmes įgyja funkcija

$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$, kai x įgyja reikšmes iš taško $x = 4$ aplinkos, išskyrus patį tašką $x = 4$.

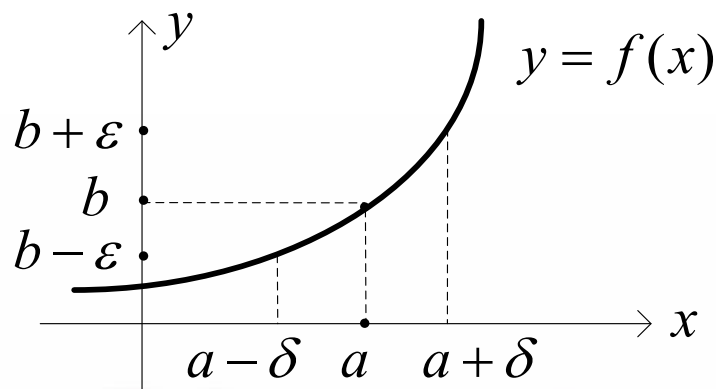
x	3,9	3,99	3,999	3,9999	4	4,0001	4,001	4,01	4,1
$f(x)$	7,9	7,99	7,999	7,9999	–	8,0001	8,001	8,01	8,1

$f(x) \rightarrow 8$, kai $x \rightarrow 4$. Sakome, kad $f(x)$ riba, kai $x \rightarrow 4$ yra lygi 8.

FUNKCIJOS RIBA TAŠKE

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ apibrėžta tam tikroje taško a aplinkoje, išskyrus patį tašką a .

Apibrėžimas. Skaičius b vadinamas **funkcijos f riba taške a** , jei bet kurį $\varepsilon > 0$ atitinka tokia taško a aplinka δ , kad su visais x iš šios aplinkos, atitinkamos funkcijos reikšmės patenka į taško b aplinką ε . Žymėsime $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Geometrinė funkcijos ribos prasmė:

Matome, kad δ priklauso nuo pasirinkto ε .

Mažinant ε , mažėja ir δ .

Jei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, tai iš to, kad x priklauso taško a δ – aplinkai, išplaukia, kad $y = f(x)$ priklauso taško b ε -aplinkai.

VIENPUSĖS FUNKCIJOS RIBOS

Apibrėžimas. Jei ieškant funkcijos ribos, kai $x \rightarrow a$, apsiribojama tik x reikšmėmis, tokiomis, kad $x < a$, tai tokia riba vadinama funkcijos **riba iš kairės** ir žymima

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1.$$

Apibrėžimas. Jei ieškant funkcijos ribos, kai $x \rightarrow a$, apsiribojama tik x reikšmėmis, tokiomis, kad $x > a$, tai tokia riba vadinama funkcijos **riba iš dešinės** ir žymima

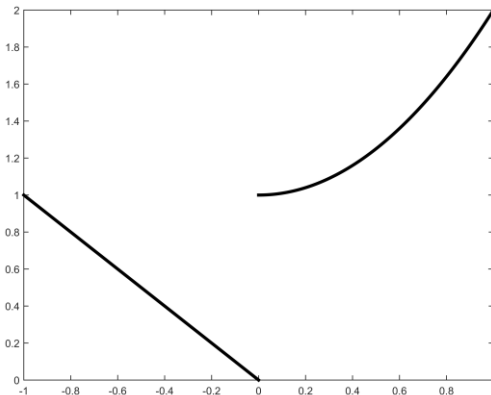
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2.$$

Apibrėžimas. Šios ribos vadinamos funkcijos vienusėmis ribomis. Kai $b_1 = b_2$, sakoma, kad funkcija f turi ribą taške a , kai $b_1 \neq b_2$ – funkcija f taške a ribos neturi.

VIENPUSĖS FUNKCIJOS RIBOS

Pavyzdys. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kai } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$

Rasime funkcijos $f(x)$ vienvpuses ribas taške $x = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 + 1) = 1.$$

Kadangi $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x),$

Funkcija $f(x)$ taške $x = 0$ ribos neturi.

FUNKCIJOS RIBA, KAI $x \rightarrow \infty$

Imkime pavyzdį $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Akivaizdu, kad kuo didesnis x tuo reiškinys $\left|\frac{1}{x}\right|$ mažėja. Taigi, kai x reikšmės didelės, funkcijos reikšmės mažai skiriasi nuo 3. Sakoma, kad funkcijos riba lygi 3, kai $x \rightarrow \infty$ ir rašoma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3$$

Bendru atveju žymima

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Be to, užrašas $x \rightarrow \infty$ turi būti suprantamas kaip $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$. Jei $x \rightarrow -\infty$ ir $x \rightarrow +\infty$ ribos nesutampa, tai jos nagrinėjamos atskirai.

FUNKCIJOS RIBA, KAI $x \rightarrow \infty$

Funkcijos f riba taške a yra begalybė, jei yra taško a aplinka, kurios visuose taškuose teisinga nelygybė $|f(x)| > M$, koks didelis teigiamas skaičius M bebūtų.

Pavyzdys. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = x$ riba, kai $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

APRĖŽTOSIOS IR NEAPRĖŽTOSIOS FUNKCIJOS

Apibrėžimas. Funkcijos, kurių ribos, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$ lygios begalybei, vadinamos **neaprėžtai didėjančiomis**.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama **aprėžtąja tam tikrame intervale**, jeigu egzistuoja toks $M > 0$, kad su visomis x reikšmėmis iš duotojo intervalo teisinga nelygybė $|f(x)| \leq M$.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama **aprėžtąja**, kai $x \rightarrow a$, jei egzistuoja tokia taško a aplinka $(a - \delta) \cup (a + \delta)$, kurioje ta funkcija yra aprėžta.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama **aprėžtąja**, kai $x \rightarrow \infty$, jei egzistuoja toks skaičius $N > 0$, kad su visais $|x| > N$ funkcija f yra aprėžta.

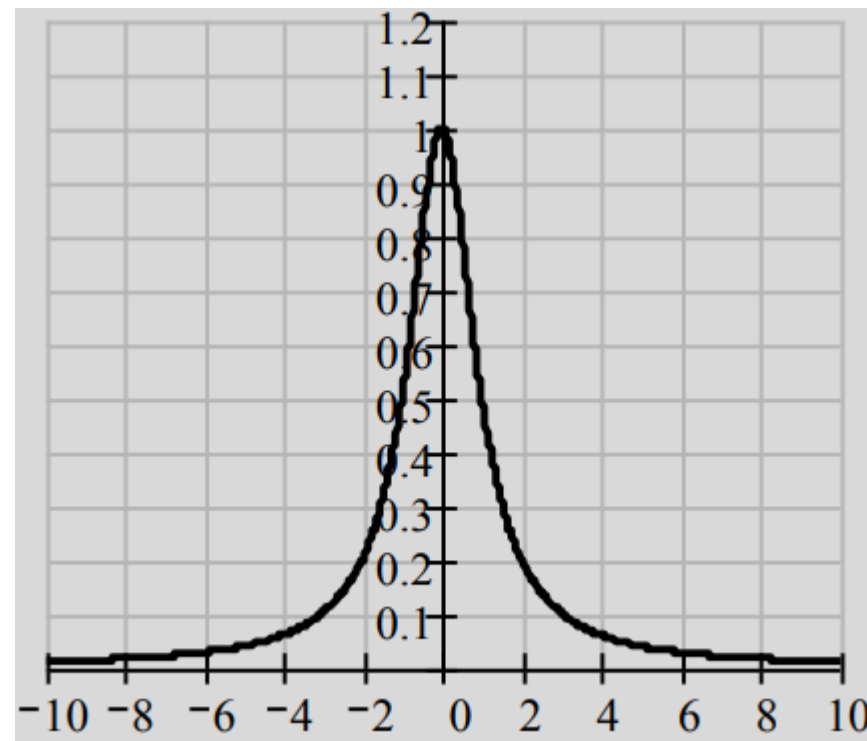
APRĖŽTOSIOS IR NEAPRĖŽTOSIOS FUNKCIJOS

Pavyzdys.

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ - aprėžta visur.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+(-0)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+(+0)^2} = 1$$



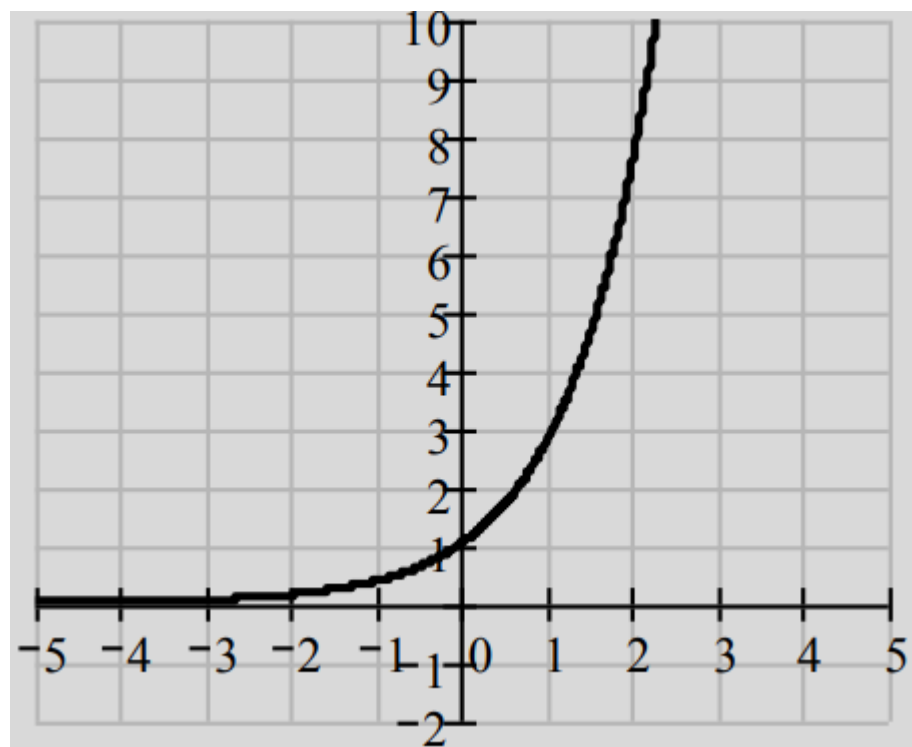
APRĖŽTOSIOS IR NEAPRĖŽTOSIOS FUNKCIJOS

Pavyzdys.

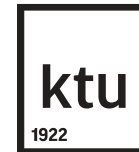
2. $f(x) = e^x$ aprėžta iš apačios, kai $x \rightarrow -\infty$ ir yra neaprėžtai didėjanti, kai $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty = +\infty$$



APRĖŽTOSIOS IR NEAPRĖŽTOSIOS FUNKCIJOS



Bet kuri neaprėžtai didėjanti funkcija yra neaprėžta.

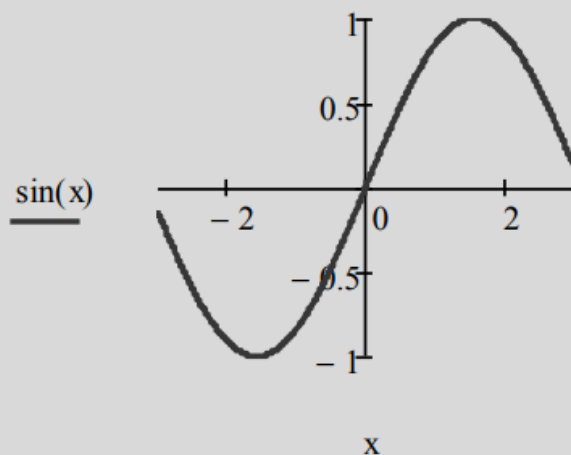
!!!Tačiau jei funkcija yra neaprėžta, tai dar nereiškia, kad ji yra neaprėžtai didėjanti!!!

NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS

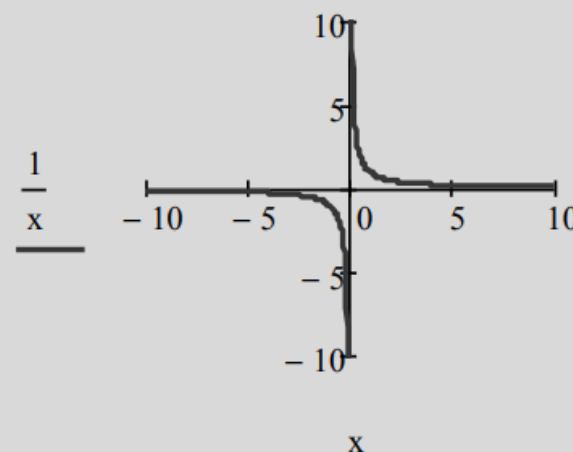
Apibrėžimas. Funkcija $\alpha(x)$ vadinama **nykstamąja**, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$, jeigu jos riba lygi nuliui.

Pavyzdys.

Funkcija $f(x) = \sin x$ nyksta, kai $x \rightarrow 0$.



Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nyksta, kai $x \rightarrow \infty$.



NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS

Teorema.

Funkcija $f(x)$ taške $x = a$ turi **baigtinę ribą** b tada ir tik tada, kai ji išreiškiama suma

$$b + \alpha(x),$$

kurioje $\alpha(x)$ yra nykstamoji funkcija, kai $x \rightarrow a$.

NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS



1 savybė. Baigtinio skaičiaus nykstamųjų funkcijų suma yra nykstamoji funkcija.

2 savybė. Apręžtosios ir nykstamosios funkcijų sandauga yra nykstamoji funkcija.

3 savybė. Dviejų nykstamų funkcijų sandauga yra nykstamoji funkcija.

4 savybė. Konstantos ir nykstamosios funkcijos sandauga yra nykstamoji funkcija.

NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS

5 savybė. Jei funkcija $f(x)$ yra neaprežtai didėjanti, kai $x \rightarrow a$ tai funkcija

$$\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$$

yra nykstamoji, kai $x \rightarrow a$.

6 savybė. Jei funkcija $\alpha(x)$ yra nykstamoji, kai $x \rightarrow a$ tai funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

yra neaprežtai didėjanti, kai $x \rightarrow a$.

NYKSTAMOJI FUNKCIJA IR JOS SAVYBĖS

Šios savybės įteisina tokius simbolinius užrašus, naudojamus skaičiuojant ribas:

$$\frac{C}{+0} = +\infty \quad \frac{C}{-0} = -\infty \quad \frac{C}{0} = \infty$$

$$\frac{C}{+\infty} = +0 \quad \frac{C}{-\infty} = -0 \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

FUNKCIJOS RIBOS EGZISTAVIMO POŽYMAI



Teorema.

Monotoniškai didėjanti (mažėjanti) ir apribotoji iš viršaus (iš apačios) aibėje X funkcija turi baigtinę ribą, kai $x \rightarrow a, a \in X$.

FUNKCIJOS RIBOS EGZISTAVIMO POŽYMIAI

Teorema. (*Tarpinės funkcijos ribos teorema*)

Jei funkcijos tenkina sąlygą

$$u(x) \leq z(x) \leq v(x) \\ \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

$$\text{ir } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = b,$$

tai

$$\lim_{x \rightarrow a} z(x) = b.$$

Teorema. Jei funkcijos f ir g turi baigtines ribas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \text{ tai:}$$

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B;$
2. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A;$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$

NEAPIBRĖŽTIEJI REIŠKINIAI

Nagrinėsime reiškinių $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ribas, kai $f(x)$ ir $g(x)$ ribos yra begalinės arba lygios nuliui.

Neapibrėžtumai:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

NEAPIBRĖŽTIEJI REIŠKINIAI

Skaičiuodami reiškinių $u(x)^{v(x)}$ ribą, galime susidurti su tokiais neapibrėžtumais:

$$1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

Skaičiuokime 1^{∞} tipo neapibrėžtumą:

Tarkime $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$, o $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$, tada

$$u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (u(x) - 1)v(x)}$$

NYKSTAMŲJŲ FUNKCIJŲ PALYGINIMAS

Tarkime, kad $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ yra nykstamosios funkcijos, kai $x \rightarrow a$ arba $x \rightarrow \infty$. Šias funkcijas lyginsime, nagrinėdami jų santykio ribą

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Apibrėžimas. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$, tai $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ vadinamos tos pačios eilės nykstamosiomis funkcijomis, kai $x \rightarrow a$.

Pavyzdys. Kai $x \rightarrow 0$, $\alpha(x) = 2x^3$, $\beta(x) = 5x^3$ yra tos pačios eilės nykstamosios funkcijos, nes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{5x^3} = \frac{2}{5} \neq 0$$

NYKSTAMŲJŲ FUNKCIJŲ PALYGINIMAS

Apibrėžimas. Jei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, tai $\alpha(x)$ vadinama aukštesnės eilės negu $\beta(x)$ nykstamąja funkcija, kai $x \rightarrow a$.

Žymėsime $\alpha(x) = o(\beta(x)), x \rightarrow a$.

Pavyzdys. Kai $x \rightarrow \infty$, $\alpha(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\beta(x) = \frac{3}{1+x}$ yra nykstamosios funkcijos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

EKVIVALENČIOS IR NYKSTAMOSIOS FUNKCIJOS

Apibrėžimas. Jei

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

tai $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ vadinamos ekvivalenčiomis nykstamosiomis funkcijomis.

Žymėsime $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow a$.

EKVIVALENČIOS IR NYKSTAMOSIOS FUNKCIJOS

Ekvivalenčių funkcijų pavyzdžiai:

1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

2) $\sin kx \sim kx, x \rightarrow 0.$

3) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0.$

4) $\operatorname{tg} kx \sim kx, x \rightarrow 0.$

5) $1 - \cos x \sim \frac{(x)^2}{2}, x \rightarrow 0.$

6) $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0.$

7) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0.$

8) $\ln(1 + x) \sim x, x \rightarrow 0.$

9) $e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0.$

EKVIVALENČIOS IR NYKSTAMOSIOS FUNKCIJOS

Teorema. Dviejų nykstanųjų funkcijų santykio riba nepasikeičia, pakeitus jas joms ekvivalenčiomis funkcijomis.

Pavyzdys. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2},$

nes $\sin 5x \sim 5x$, $\sin 2x \sim 2x$, kai $x \rightarrow 0$.

- Funkcijos riba:
 - ✓ Taške;
 - ✓ Vienpusės ribos;
 - ✓ Funkcijos riba, kai $x \rightarrow \infty$.
- Aprėžtoji(Neapreprėžtoji) funkcija.
- Nykstamoji funkcija ir jos savybės.
- Neapreprėžtieji reiřkiniai.
- Nykstamųjų funkcijų palyginimas.

- Funkcijos tolydumo taške apibrėžimai.
- Tolydžių atkarpoje funkcijų savybės.
- Trūkiosios funkcijos.
- Trūkio taškų tipai.



Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt