

8 PASKAITA

FUNKCIJOS TOLYDUMO TAŠKE APIBRĖŽIMAI
TRŪKIOSIOS FUNKCIJOS
TRŪKIO TAŠKŲ TIPAI



- Funkcijos tolydumo taške apibrėžimas:
 - ✓ pateikite tris tolydumo apibrėžimus ir paaiškinkite sąryšį tarp šių apibrėžimų;
 - ✓ mokėkite patikrinti, ar funkcija tolydi taške.
- Trūkio taškai:
 - ✓ trūkio taško apibrėžimas;
 - ✓ trūkio taškų klasifikacija (pailiustruokite brėžiniais);
 - ✓ mokėti nustatyti trūkio taško rūšį.

FUNKCIJOS TOLYDUMO TAŠKE APIBRĖŽIMAS

Apibrėžimas(1). Funcija $f: X \rightarrow Y$ vadinama **tolydžia taške** $x_0 \in X$, jeigu ji apibrėžta šiame taške ir jo aplinkoje, ir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Taikydami ribos apibrėžimą, galime sakyti, kad f yra tolydi taške x_0 , jei

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



FUNKCIJOS TOLYDUMO TAŠKE APIBRĖŽIMAS

Pažymėkime:

$\Delta x = x - x_0$ – argumento pokytis,

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – funkcijos pokytis.

Jei funkcija $f(x)$ yra tolydi, tai iš tolydumo apibrėžimo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

arba $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, nes kai $x \rightarrow x_0$, tai $\Delta x \rightarrow 0$.

Apibrėžimas(2). Funkcija f vadinama **tolydžia taške** x_0 , jei nykstantą argumento pokytį atitinka nykstamas funkcijos pokytis.



FUNKCIJOS TOLYDUMO TAŠKE APIBRĖŽIMAS

Pastaba. Jei funkcija yra tolydi, tai ribos ir funkcijos simbolius galima sukeisti vietomis.

Apibrėžimas(3). Funkcija f vadinama **tolydžia iš kairės taške** x_0 , jei

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

ir vadinama **tolydžia iš dešinės taške** x_0 , jei

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

Išvada: funkcija f yra tolydi taške x_0 ,

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$



FUNKCIJOS TOLYDUMO TAŠKE APIBRĖŽIMAS

Teorema. Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ tolydžios taške x_0 , tai funkcijos:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

kai $g(x_0) \neq 0$ yra tolydžios tame taške.

TOLYDŽIŲ ATKARPOJE FUNKCIJŲ SAVYBĖS

Sakykime, kad f yra tolydi intervale $(a; b)$, jeigu ji yra tolydi kiekviename to intervalo taške.

Funkcija f yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, jei ji tolydi intervale $(a; b)$, taške a tolydi iš dešinės, o taške b – tolydi iš kairės.

FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Apibrėžimas. Taškas x_0 yra funkcijos f trūkio taškas, jei šiame taške funkcija yra neapibrėžta arba netolydi.

Apibrėžimas. Taškas x_0 yra vadinamas **pirmosios rūšies** trūkio tašku, jei tame taške egzistuoja baigtinės funkcijos ribos iš kairės ir iš dešinės, tačiau jos nėra lygios

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

Sakoma, kad taške x_0 funkcija daro baigtinį šuolį.



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI



Pavyzdys. Taškas $x = 1$ yra funkcijos $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

trūkio taškas. Nustatyti jo rūšį.

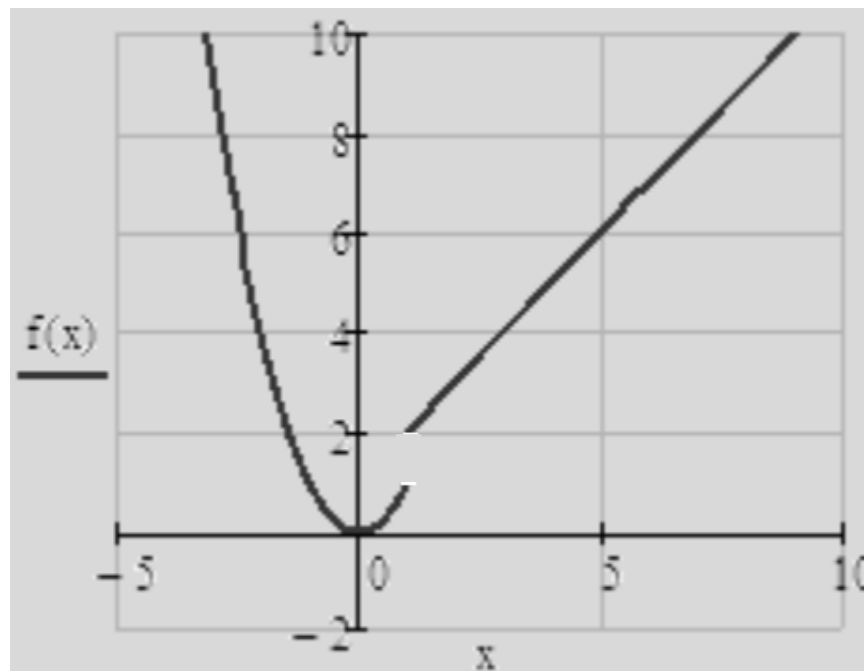
$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2$$

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

todėl taškas $x = 1$ yra

pirmos rūšies trūkio taškas



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Apibrėžimas. Jei taške x_0 bent viena funkcijos f vienvusė riba neegzistuoja arba yra begalinė, tai taškas x_0 vadinamas funkcijos **antrosios rūšies** trūkio tašku.



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

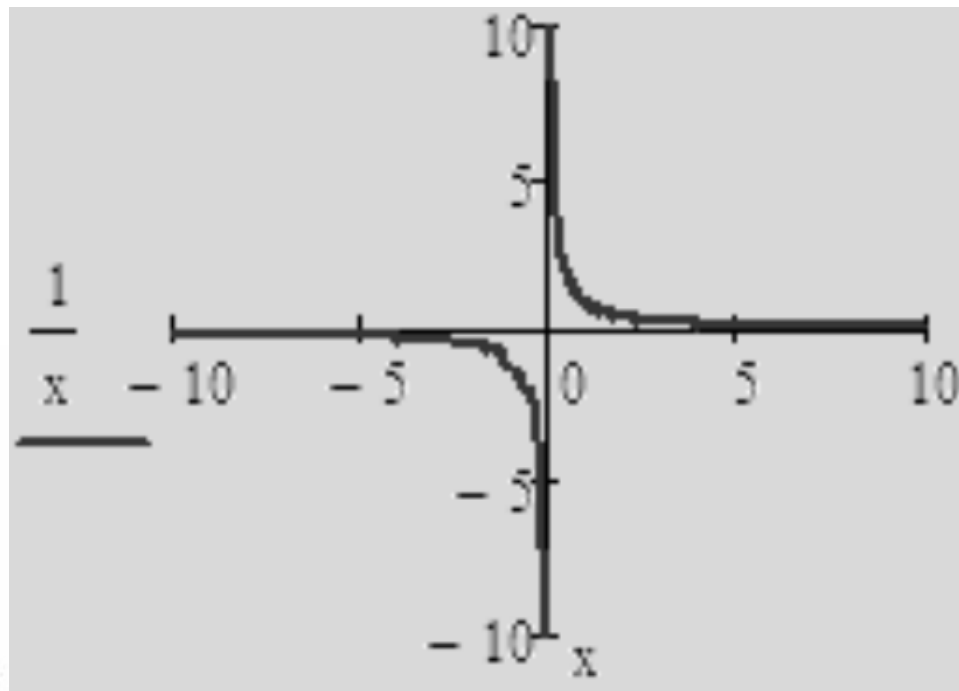


Pavyzdys. Taškas $x = 0$ yra funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ trūkio taškas.

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

todėl taškas $x = 0$ –
antros rūšies trūkio taškas.



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Apibrėžimas. Taškas x_0 vadinamas funkcijos f pašalinamuoju trūkio tašku, jei

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

Tokį trūkio tašką galima pašalinti funkcijos reikšmę $f(x_0)$ pakeisdami jos riba $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.



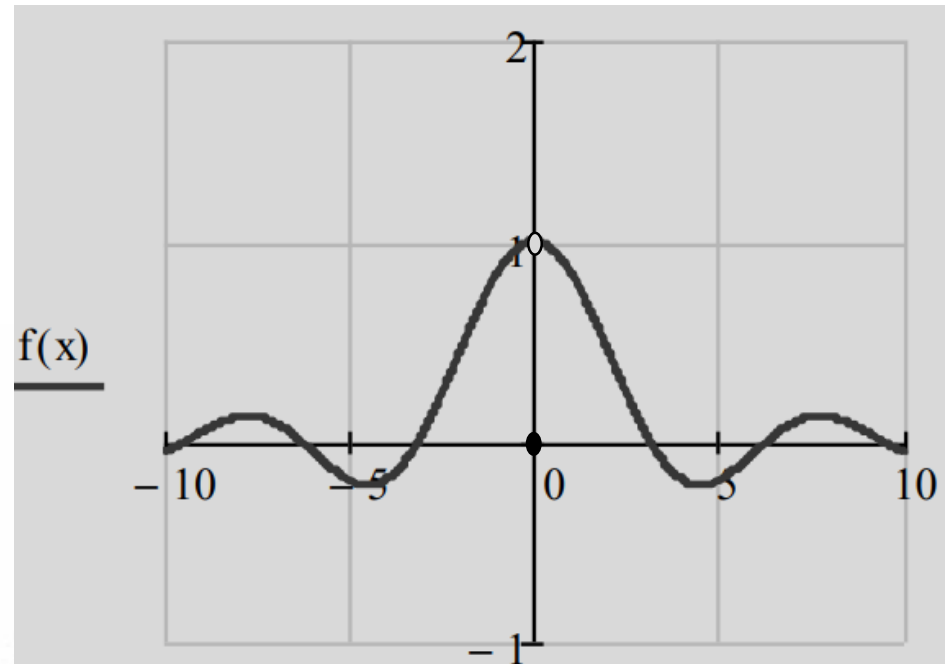
FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Pavyzdys. Taškas $x = 0$ yra funkcijos $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \end{cases}$

trūkio taškas, nes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\text{o } f(0) = 0.$$



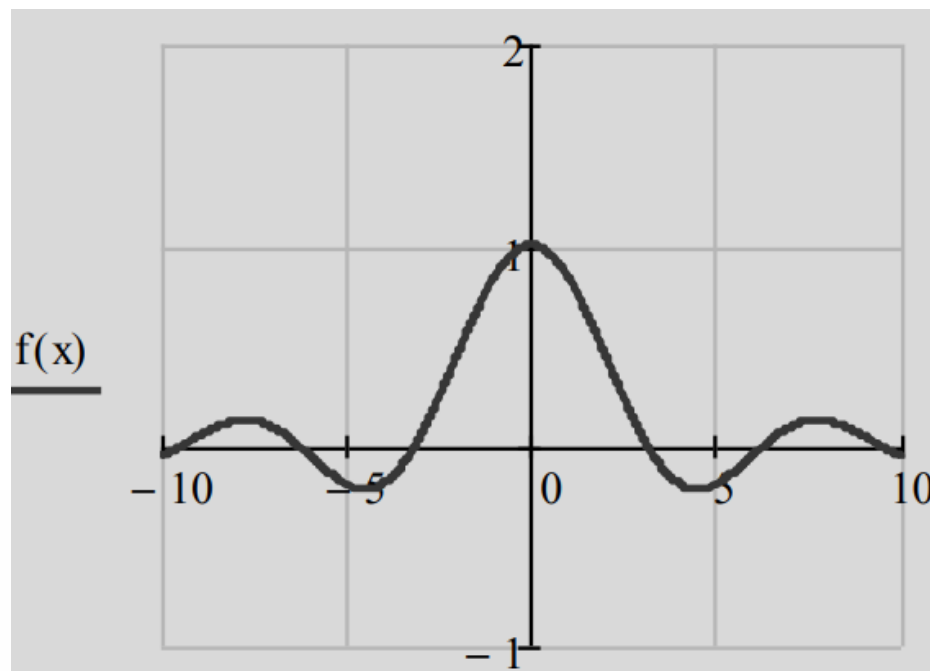
Matematika 1 (P130B001)



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Jis yra pašalinamasis trūkio taškas, nes galima sudaryti naują tolydžią taške $x = 0$ funkciją $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$



Funkcijos reikšmę $f(0)$ pakeitėme jos ribine reikšme taške

$$x = 0, \text{ t.y. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$



FUNKCIJŲ TRŪKIO TAŠKAI

Uždavinys. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x}{5-x}$ trūkio tašką ir nustatykite jo rūšį.

Uždavinys. Su kuriomis parametų a ir b reikšmėmis funkcija $f(x)$ bus tolydi visuose apibrėžimo srities taškuose:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), x \leq 0, \\ ax + b, 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-1}, x > 2. \end{cases}$$

- Funkcijos tolydumo taške apibrėžimai.
- Trūkio taškai ir jų tipai.

- Išvestinės apibrėžimas.
- Diferencijuojamos funkcijos apibrėžimas, jos tolydumas.
- Išvestinės:
 - ✓ sudėtinių funkcijų;
 - ✓ atvirkštinių funkcijų;
 - ✓ neišreikštinių funkcijų;
 - ✓ parametrinių funkcijų.
- Lopitalio taisyklė.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt