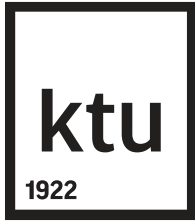


5 PASKAITA



TATJANA SIDEKERSKIENĖ

El. paštas:

tatjana.sidekerskiene@ktu.lt

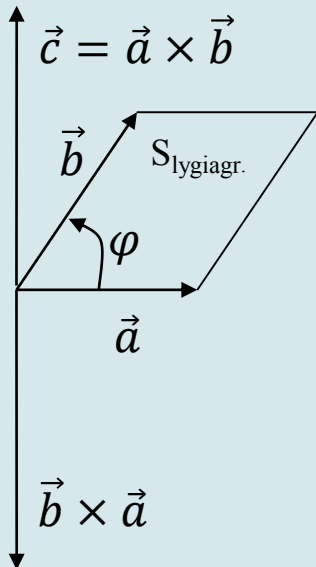
Internetinis puslapis: www.tany.lt/stud

VEKTORINĖ SANDAUGA

Apibrėžimas.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorine sandauga $\vec{a} \times \vec{b}$ vadiname vektorių $\vec{c}$, tenkinantį tris sąlygas:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, taigi $\vec{c}$ statmenas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ plokštumai;
- 2) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{lyg} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$;
- 3) vektorius $\vec{c}$ nukreiptas taip, kad, žiūrint iš jo galo, atrodytų, jog vektorius $\vec{a}$, pasuktas mažiausiu kampu φ prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, sutampa su vektoriaus $\vec{b}$ kryptimi.



Savybės:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}),$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Pavyzdys:

$$(2\vec{a} - 5\vec{b}) \times (4\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times 4\vec{a} + 2\vec{a} \times 2\vec{b} - 5\vec{b} \times 4\vec{a} - 5\vec{b} \times 2\vec{b} = ???$$

1 Užduotis. Rasti $|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|$, kai $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, o kampas $\varphi(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 30^\circ$.

PRIMINIMAI: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Skaiciavimas:

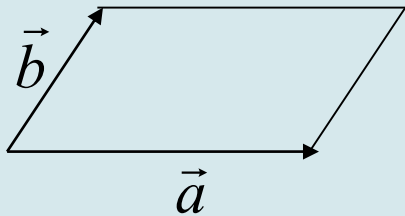
Jei yra žinomos vektorių koordinatės stačiakampėje Dekarto koordinatinių sistemoje, tada

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

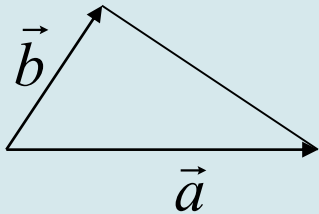
Pavyzdys. Raskime vektorių $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorinę sandaugą.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k} = \{0; 5; 5\}.$$

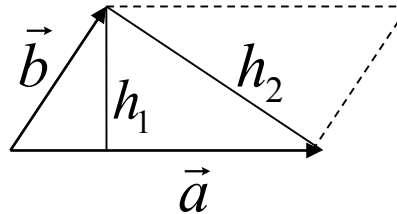
Taikymai:



$$S_{lyg} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|,$$



$$h_1 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|},$$

$$h_2 = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

2 Užduotis. Duotos trikampio tris viršūnės:

$$A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)$$

Rasti plotą, jo aukštinę nuleistą, iš viršūnės A bei perimetrą.

3 Užduotis. Rasti lygiagretainio, sudaryto iš vektorių

$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ir $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$ plotą, jeigu $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, ir

kampas $\varphi(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

4 Užduotis. Vektorius $\vec{x}$ statmenas vektoriams

$\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ ir $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$ ir su O_y sudaro buką kampą.

Raskite vektoriaus $\vec{x}$ koordinates, jei $|\vec{x}| = 26$.

MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA

Skaiciavimas:

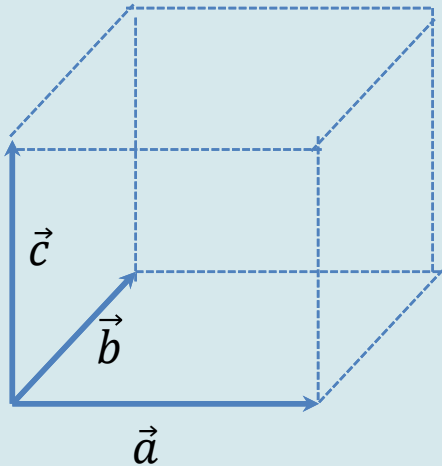
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Taikymai:

$$V_{gret} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}|, \quad V_{pir} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}|,$$

Trijų vektorių $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarumo sąlyga:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$



MIŠRIOJI TRIJŲ VEKTORIŲ SANDAUGA

5 Užduotis. Apskaičiuokite piramidės tūrį, jei žinote jo viršūnių koordinates:

$$A(2;-1;1), \quad B(5;5;4), \quad C(3;2;-1), \quad D(4;1;3).$$

6 Užduotis. Duoti 3 vektoriai: $\vec{a} = \{2;3;-1\}$, $\vec{b} = \{1;-1;3\}$, $\vec{c} = \{1;9;-11\}$. Įrodykite, kad jie komplanarus.

7 Užduotis. Ar gali keturi taškai $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(1;-3;6)$ ir $D(4;-2;3)$ priklausyti vienai plokštumai?

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė
E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt