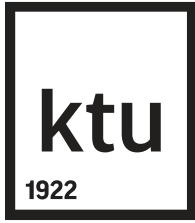


9-10 PASKAITA



TATJANA SIDEKERSKIENĖ

El. paštas:

tatjana.sidekerskiene@ktu.lt

Internetinis puslapis: www.tany.lt/stud

Neapibrėžtieji reiškiniai:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0.$$

Ribų skaičiavimas esant neapibrėžtumui $\frac{0}{0}$.

Panaikinti neapibrėžtumą – reiškia rasti jo ribą, jeigu ji egzistuoja.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 9x + 14};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x};$$

Pagalbinės formulės:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
 x_1, x_2 – kv. trinario šaknys

Kaip surasti x_1, x_2 :
 $ax^2 + bx + c = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$$

Pagalbinės formulės:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \arctg \left(\frac{x-1}{x - \sqrt{2x-1}} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 25} - 5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2\sqrt{3-x}} = \frac{5}{2}$$

Ribų skaičiavimas esant $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1};$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{6x + 1};$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \sqrt[3]{\frac{2 - 3x^2}{4 + 3x^2}};$

10) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(1 - 2x)^3}{\sqrt{25x^6 + 1} + x^3};$

Trigonometrinių ribų skaičiavimas, esant $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$.

- Apibrėžimas.** Dvi nykstamosios funkcijos $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$, kai $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), vadinamos ekvivalenčiomis, jei

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Išvardinsime keletą ekvivalenčių nykstančių funkcijų:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x} = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2};$$

- 1) $\sin x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 2) $\sin kx \sim kx$, kai $x \rightarrow 0$.
- 3) $\operatorname{tg} x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 4) $\operatorname{tg} kx \sim kx$, kai $x \rightarrow 0$.
- 5) $1 - \cos x \sim \frac{(x)^2}{2}$, kai $x \rightarrow 0$.
- 6) $\arcsin x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 7) $\arctg x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 8) $\ln(1 + x) \sim x$, $x \rightarrow 0$.
- 9) $e^x - 1 \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.

Trigonometrijos formulės

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)); \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x; \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0; \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}; \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \quad \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Ekvivalenčiomis nykstančiomis funkcijomis galima pakeisti tada, kai $x \rightarrow 0$, todėl jei $x \rightarrow x_0$, darome keitinį $z = x - x_0$.

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = -\frac{2}{3};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

- 1) $\sin x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 2) $\sin kx \sim kx$, kai $x \rightarrow 0$.
- 3) $\operatorname{tg} x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 4) $\operatorname{tg} kx \sim kx$, kai $x \rightarrow 0$.
- 5) $1 - \cos x \sim \frac{(x)^2}{2}$, kai $x \rightarrow 0$.
- 6) $\arcsin x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 7) $\arctg x \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.
- 8) $\ln(1+x) \sim x$, $x \rightarrow 0$.
- 9) $e^x - 1 \sim x$, kai $x \rightarrow 0$.

Ribų skaičiavimas, esant $(\infty - \infty), (0 \cdot \infty)$.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 8x} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right);$$

Ribų skaičiavimas, esant 1^∞

- Skaičiuosime skaičiaus e pagalbą: $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{\frac{2x}{x-2}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} \right)^{x^2 - 3x + 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{4x} = e^{-6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} \right)^{x+1} = \frac{1}{e};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{1-6x} = e^4;$$

Ribų skaičiavimas, esant 1^∞

- Pagal formulę:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow \infty}} u^v = (1^\infty) = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow \infty}} v(u-1)}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 5} (11 - 2x)^{\frac{3x}{x^2 - 25}} = e^{-3}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 2x)^{\frac{1}{1 - \cos 2x}} = e^2.$$

Medžiagą galima rasti:
[www.tany.lt/stud](http://www.tany.lt/studmatematika1)
matematika1

Parengė: Tatjana Sidekerskienė
E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt