

# Gradientas

Funkcijos  $u = u(x, y, z)$  gradientu taške  $M$ , vadinsime vektorių, kurio koordinatės yra funkcijos  $u$  dalinės išvestinės  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

**1 Užd.** Raskite kampą tarp funkcijos  $u = x^2 + y^2 + 2z^2$  gradientų taškuose  $M_1(3, -1, 4)$  ir  $M_2(1, -1, 1)$ .

## Kryptinė išvestinė

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{grad } u \cdot \vec{s}^\circ = \left( \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

**2 Užd.** Apskaičiuokite funkcijos  $z = x^2 - xy - 2y^2$  kryptinę išvestinę taške  $M_0(1, 2)$  kryptimi  $\overrightarrow{M_0B}$ , kai  $B(4, 6)$ .

**3 Užd.** Raskite f-jos  $u = xyz$  kryptinę išvestinę taške  $M_1(1,1,1)$  vektoriaus  $\vec{s}$  kryptimi, jei jis su ašimis sudaro  $60^\circ, 135^\circ, 120^\circ$ .

**4 Užd.** Apskaičiuokite funkcijos  $u = y^2z - 2x^2y + \sin(z - 1)$  išvestinę taške  $M_0(3;1;1)$  vektoriaus  $\vec{s}$  kryptimi, jei  $\vec{s}$  sudaro su koordinačių ašimis kampus  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{3\pi}{4}$ . Nustatykite funkcijos kitimo pobūdį ir greitį duotąja kryptimi.

# Kryptinė išvestinė gradiento kryptimi

Kryptinės išvestinės reikšmė bus didžiausia, kai  $\vec{s} = \nabla u$ , tuomet

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\vec{s}=\nabla u} = |\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Taigi funkcijos gradientas apibūdina tos funkcijos greičiausio augimo (pakilimo) kryptį.

**5 Užd.** Raskite funkcijos  $u = 2xyz$  kryptinę išvestinę taške  $M_0(2, -1, 3)$  jos gradiento šiame taške kryptimi.

**6 Užd.** Raskite funkcijos  $u = (xy)^{\sin z}$  didžiausią kryptinę išvestinę taške  $A\left(1; 2; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**7 Užd.** Raskite vektorių, kurio kryptimi funkcijos  $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$  kitimo greitis būtų didžiausias taške  $M(-1; 1; -1)$ .