

1 PASKAITA

Veiksmai su kompleksiniais skaičiais

Pažymėkime kvadratinės lygties $x^2 + 1 = 0$ vieną šaknį $i = \sqrt{-1}$. Šis simbolis vadinamas **menamuoju vienetu**. Jo dėka galima apibrėžti kompleksinius skaičius.

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ – kompleksinis skaičius, C – kompleksinių skaičių aibė.

x – **realioji** kompleksinio skaičiaus dalis $x = \operatorname{Re} z$

y – **menamoji** kompleksinio skaičiaus dalis $y = \operatorname{Im} z$

Dviejų kompleksinių skaičių **suma** – tai kompleksinis skaičius $z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$.

Dviejų kompleksinių skaičių **skirtumas** – tai kompleksinis skaičius $z = z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

Dviejų kompleksinių skaičių **sandauga** – tai kompleksinis skaičius $z = z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Dviejų kompleksinių skaičių **dalyba**: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$. (Dviejų kompleksinių skaičių dalmenį

paprastiau gautume padauginę trupmenos $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) skaitiklį ir vardiklį iš jungtinio vardiklio)

Jungtinis skaičius $z = x + iy$ yra $\bar{z} = x - iy$.

1 Užduotis. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 7 - 5i$

a) užrašykite šių kompleksinių skaičių jungtinius skaičius.

b) $z_1 + z_2 =$

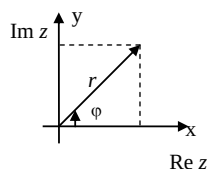
c) $z_1 - z_2 =$

d) $z_1 \cdot z_2 =$

e) $\frac{z_1}{z_2} =$

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

Kompleksinį skaičių $z = x + iy$ galima vaizduoti dvimačiu vektoriumi, kurio koordinatės yra x ir y . Vektoriaus z ilgį vadiname kompleksinio skaičiaus modulių $|z| = r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Orientuotas kampas φ vadinamas kompleksinio skaičiaus argumentu ir žymimas $\operatorname{Arg} z$. Tą patį kompleksinį skaičių z atitinka be galo daug argumento reikšmių, kurios viena nuo kito skiriasi dydžiu $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Iš jų išskiriame pagrindinę argumento reikšmę $\arg z$. ($\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$)

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{kai } x \geq 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad \text{!!!!} \quad \arctg(-x) = -\arctg(x).$$

Kiekviena kompleksinį skaičių galima užrašyti trigonometrine forma: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

2 Užduotis Pavaizduokite skaičių $z = 1 - i$ geometriškai.

3 Užduotis Išreikšti trigonometrine forma skaičių $2 + 2\sqrt{3}i$.

Dauginant trigonometrine forma išreikštus kompleksinius skaičius, jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Dalinant: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4 Užduotis $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $z_2 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$. Rasti šių $z_1 \cdot z_2$ bei $\frac{z_1}{z_2}$.

Kompleksinio skaičiaus **kėlimas laipsnių**: $z^n = r^n (\cos n\varphi_0 + i \sin n\varphi_0)$ - **Muavro formulė**.

Šaknies traukimas: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

5 Užduotis Raskite $(1+i)^6$; $\sqrt[3]{-1+i}$; $(-1+i\sqrt{3})^{60}$; $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$.

Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ rodiklinę formą užsirašo taip:

$$z = re^{i\varphi},$$

čia r – modulis, φ – argumento pagrindinė reikšmė.

Sandauga: kai $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, tai $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ir $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ($z_2 \neq 0$).

Kėlimas laipsnių: kai $z = re^{i\varphi}$, tai $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

Šaknies traukimas: : kai $z = re^{i\varphi}$, tai $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}$, čia $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

6 Užduotis Parašykite kompleksinį skaičių $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ rodikline forma. Apskaičiuokite jo 6-jį laipsnį.

7 Užduotis Išspęskite lygtį $z^2 + 4z + 5 = 0$.

8 Užduotis Raskite kompleksinio skaičiaus realiąją ir menamąją dalį:

$$z = i^{29} - \frac{5z_1}{2+i} + z_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 3 + 2i.$$