

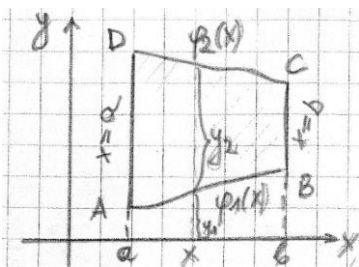
10 PASKAITA

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS IR TVARKOS KEITIMAS

Baigtinė $T_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ dvimatės integralinės sumos riba, kai $\lambda \rightarrow 0$, nepriklausanti nuo srities D suskaidymo į dalines sritis D_i būdo, bei taškų $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ parinkimo, kad f-jos $f(x, y)$ dvilypėje integralų srityje D ir žymima: $\iint_D f(x, y) dS$; $\iint_D f(x, y) ds dy$ ir f-ja $f(x, y)$ yra integruojama srityje D . Nagrinėjame tik tolydžias funkcijas.

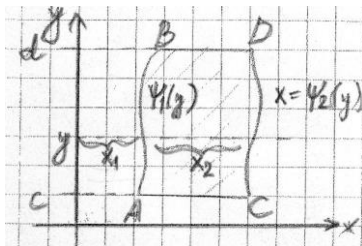
Geometrinė prasmė: jei srityje D , $f(x) \geq 0$, tai $\iint_D f(x, y) dS$ lygus **cilindrinio kūno tūriui**, kurį iš viršaus riboja paviršius $z = f(x, y)$, iš apačios xOy plokštumos sritis D , iš šonų – cilindrinis paviršius, kurio sudaromosios lygiagrečios Oz ašiai, o vedamoji yra sritis D kontūras L .

* Dvilypių integralų apskaičiavimas, pakeičiamas nuoseklių dviejų apibrėžtinių (vienalypių) integralų apskaičiavimui.

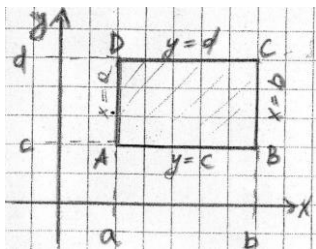


$x = a, x = b$ – tiesės; $y = \varphi_{1,2}(x)$ – tolydžios kreivės

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Jei integravimo sritis nepriklauso nei vienam iš jau nagrinėtų tipų, tai ją tiesėmis lygiagrečiomis koordinatų ašims skaidome į sritis $D_1, \dots, D_n$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

$$1) I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy$$

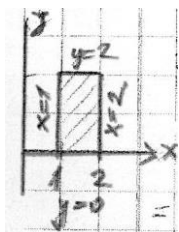
čia dvilypis integralas jau išreikštas kartotiniu integralu, integravimo rėžiai nustatyti, todėl vidinį integralą integruosime y atžvilgiu, x laikydami pastoviu dydžiu

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^1 = \int_0^1 \left(\left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} x^2 \right) dx =$$

toliau dar kartą integruojame x atžvilgiu atkarpoje [0;1]

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) Apskaičiuoti $\iint_D (x+y^3) dx dy$ srityje D, apribotoje tiesių $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$

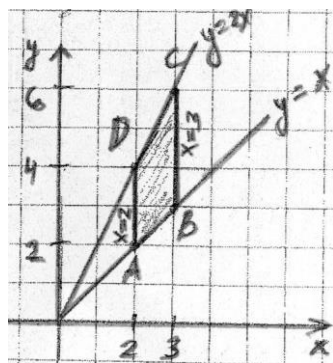


Kadangi rėžiai pastovūs, integruoti pagal x ar y – nesvarbu

$$I = \int_1^2 dx \int_0^2 (x+y^3) dy = \int_1^2 dx \cdot \left(xy + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \int_1^2 (2x+4) dx = \left(x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 = 12 - 5 = 7$$

3) Apskaičiuoti $\iint_D (x+2y) dx \cdot dy$, kai sritį D riboja tiesės $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Pirmiausia nubrėžiame integravimo sritį D ir surandame ją ribojančių tiesių susikirtimo taškų koordinates:



A(2;2)

B(3;3)

C(3;6)

D(2;4)

Per šiuos taškus vedame tieses, statmenas Ox ir Oy ašims. Šią sritį galima apibrėžti nelygybių pagalba

$$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+2y) dx \cdot dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy = \int_2^3 dx \left(xy + y^2 \right) \Big|_x^{2x} = \int_2^3 \left(x \cdot 2x - x^2 + (2x)^2 - x^2 \right) dx = 4 \int_2^3 x^2 dx = \\ &= 4 \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{4}{3} (27 - 8) = \frac{76}{3} \end{aligned}$$

Išmoksime nustatyti rėžius, kai sritis netačiakampė

1) integravimo sritis – lygiagretainis

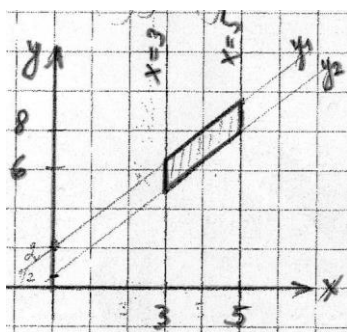
$$x=3, x=5$$

$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{3x+4}{2}$$

$$y_2 = \frac{3x+1}{2}$$



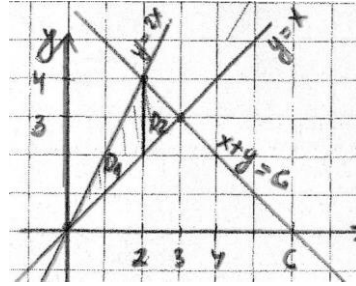
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy$$

2) integravimo sritis – trikampis

$$y=x, y=2x$$

$$x+y=6$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y) dy$$



3) D – lygiagretainis

$$y=x, y=x+3$$

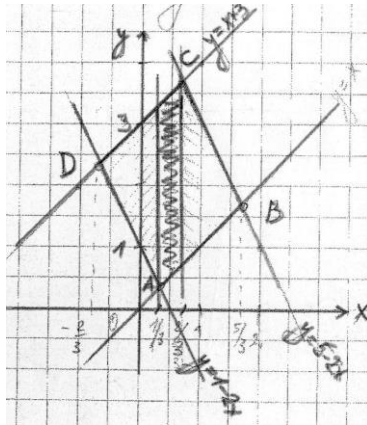
$$y=-2x+1, y=-2x+5$$

$$A: \begin{cases} y=x \\ y=1-2x \end{cases} \quad x=\frac{1}{3}$$

$$B: \begin{cases} y=x \\ y=5-2x \end{cases} \quad x=\frac{5}{3}$$

$$C: \begin{cases} y=x+3 \\ y=5-2x \end{cases} \quad x=\frac{2}{3}$$

$$D: \begin{cases} y=x+3 \\ y=1-2x \end{cases} \quad x=-\frac{2}{3}$$



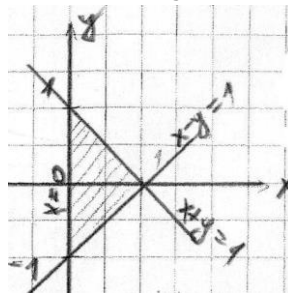
$$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int_{1-2x}^{x+3} f(x,y) dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{x+3} f(x,y) dy + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{5-2x} f(x,y) dy$$

4) Kai sritis užrašoma nelygybių pagalba

$$D: x+y \leq 1$$

$$x+y \leq 1$$

$$x \geq 0$$



$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y) dx$$

INTEGRAVIMO TVARKOS PAKEITIMAS

1) pakeisti integralo $\int_2^4 dx \int_{\frac{-x^2}{4}}^{\frac{x}{2}} f(x,y) dy$ integravimo tvarką.

Integravimo sritį galima nusakyti nelygybėmis:

$$\frac{-x^2}{4} \leq y \leq \frac{x}{2}, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

Tai sritį D riboja 4 kreivės. Nubraižome sritį D ir randame linijų susikirtimo taškus.

$$A: \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{x^2}{4} \end{cases}$$

A(2;-1)

$$B: \begin{cases} y=-\frac{x^2}{4} \\ x=4 \end{cases}$$

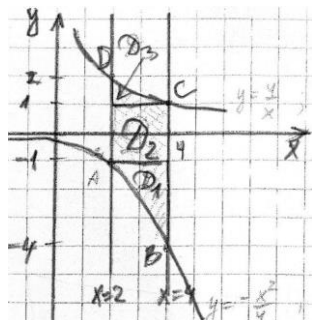
B(4;-4)

$$C: \begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ x=4 \end{cases}$$

C(4;1)

$$D: \begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ x=2 \end{cases}$$

D(2;2)



D₁: sritis D yra toje plokštumos dalyje, kur $x > 0$, todėl imame $x = 2\sqrt{-y}$ (iš

$y = -\frac{x^2}{4}$). Šios kreivės lankas sritį D riboja su tiesės $x=2$ atkarpa.

D₃: Iš $y = \frac{4}{x}$ gauname $x = \frac{4}{y}$. Ši kreivė ribojasi su $x=4$ tiesės atkarpa.

D₂: stačiakampė sritis

$$D_1 = \{(x, y) \mid -4 \leq y \leq 1; 2\sqrt{-y} \leq x \leq 4\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1; 2 \leq x \leq 4\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2; 2 \leq x \leq \frac{4}{y}\}$$

$$\int_2^4 dx \int_{-\frac{x^2}{4}}^{\frac{4}{x}} f(x, y) dy = \int_{-4}^1 dy \int_{2\sqrt{-y}}^4 f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_2^4 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_2^{\frac{4}{y}} f(x, y) dx$$

$$2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases}$$

$$y=x^2, x=\sqrt{y}, y=\frac{3-x}{2}, x=3-2y$$

