

12 PASKAITA DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Dvilypio integralo pertvarkymas iš stačiakampių koordinačių x ir y į polines koordinates ρ ir φ kurios susietos lygtimis $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$ yra atitinkamas pagal formulę:

$$\iint_D f(x, y) dx \cdot dy = \iint_{D'} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho \cdot d\rho d\varphi$$

❖ Jei integruojamą sritį D riboja 2 spinduliai $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) išeinantys iš poliaus ir dvi kreivės $\rho = \rho_1(\varphi)$ ir $\rho = \rho_2(\varphi)$, kai $\rho_1(\varphi)$ ir $\rho_2(\varphi)$ - vienareikšmės funkcijos atkarpoje $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ir ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), tai

$$\iint_D F(\rho, \varphi) \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \cdot \rho d\rho$$

čia $F(\rho, \varphi) = f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi)$.

❖ Jei koordinačių pradžios taškas O yra vidinės integralo srities D taškas, tai

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \cdot \rho d\rho$$

kai $\rho = \rho(\varphi)$ yra polinė lygtis kreivės kuri riboja sritį D .

❖ Jei integruojamą sritį D sudaro skritulys su centru poliuje ir spinduliu R tai duotą dvilypį integralą išreiškiame kartotiniu integralu su pastoviais integravimo režiais

$$\iint_D f(x, y) dx \cdot dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho$$

1. Apskaičiuoti $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, kai sritis D yra skritulys su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu $R = 1$.

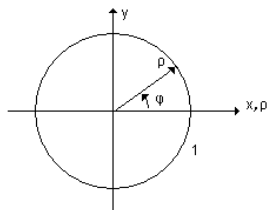
Koordinatės pakeičiame polinėmis pagal $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, o vietoje $dx \cdot dy$ įrašysime $\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$:

$$\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \sqrt{1-(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)} \cdot \rho d\rho \cdot d\varphi = \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \cdot d\varphi$$

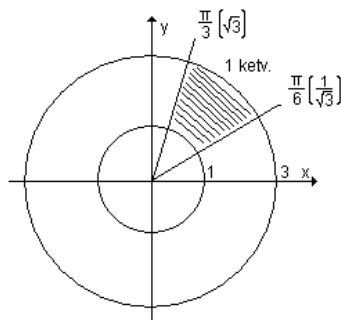
Kreivės lygtį ribojančią sritį D pervedame į polinę lygtį (lygtis $x^2 + y^2 = 1$, centras $(0, 0)$ ir $R = 1$) tai polinėje koordinačių sistemoje

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = \rho^2 = 1, \text{ tai } \rho = 1 > 0$$

Srityje D koordinatė ρ su bet koku kampu φ kinta nuo 0 iki 1, o φ kinta nuo 0 iki 2π :



$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx \cdot dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho \cdot d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1-\rho^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$



2. Apskritimas: $\iint_D \arctg \frac{y}{x} \cdot dx \cdot dy$, kai D : $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$,

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}. \text{ ATS: } \frac{\pi^2}{3}$$