4 PASKAITA
Integravimo metodai
KINTAMŲJŲ PAKEITIMO METODAS

Skaičiuodami $\int f(x)dx$, kintamąjį x pakeičiame nauju kintamuoju t, $x=\varphi(t)$, $\varphi(t)$– tolydi funkcija. Tada $dx=\varphi'(t)dt$ ir $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Apskaičiavus integralą, reikia gražinti senąjį kintamąjį.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\begin{bmatrix} t=2x+1 \\ dt=2dx \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{bmatrix}=\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{2x+1}+C$

> Pastaba:
>
> $\int g(ax+b)dx=\begin{bmatrix} t=ax+b \\ dt=adx \end{bmatrix}$; $\int g(\sin x)\cos xdx=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{bmatrix}$; $\int g(\cos x)\sin xdx=\begin{bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \end{bmatrix}$; $\int g(x^2)xdx=\begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix}$;
> $\int g(1+x^2)xdx=\begin{bmatrix} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix}$;

2) $\int ctgxdx=\int \frac{\cos xdx}{\sin x}=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{bmatrix}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C$;

3) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \end{bmatrix}=\int -\frac{dt}{t^2}=-\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{t}+C=\frac{1}{\cos x}+C$;

4) $\int xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}xdx=\begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$;

5) $\int \frac{xdx}{1+x^2}=\begin{bmatrix} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix}=\int \frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\begin{bmatrix} 1+e^x=t^2,\ x=\ln|t^2-1| \\ dx=\frac{2t}{t^2-1} \end{bmatrix}=\int \frac{2t}{t(t^2-1)}dt=2\int \frac{dt}{(t^2-1)}=2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$;

7) $\int \frac{\ln(tgx)dx}{\sin x\cos x}dx=\int \frac{\ln(tgx)dx}{tgx\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} t=tgx \\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix}=\int \frac{\ln(t)}{t}dt=\int \ln t\, d(\ln t)=\frac{\ln^2 t}{2}+C=\frac{\ln^2(tgx)}{2}+C$;

Trigonometriniai keitiniai:

Kai pointegraciniame reiškinyje yra dauginamasis

- $\sqrt{a^2-x^2}$ patogu įvesti trigonometrinius keitinius: $x=a\sin t$ arba $x=a\cos t$.
- $\sqrt{a^2+x^2}$ patogu įvesti trigonometrinius keitinius: $x=a\mathrm{tg}t$ arba $x=a\mathrm{ctg}t$.
- $\sqrt{x^2-a^2}$ patogu įvesti trigonometrinius keitinius: $x=\frac{a}{\cos t}$ arba $x=\frac{a}{\sin t}$.

1) $\int \sqrt{4-x^2}dx=\begin{bmatrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos tdt \end{bmatrix}=\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=\int 2\cos t2\cos tdt=4\int \cos^2 tdt=\left[1+\cos 2t=2\cos^2 t\right]=4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=$

$=2\int dt+2\int \cos 2tdt=2t+\int \cos 2td(2t)=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$, nes $x=2\sin t\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{2}$ ir $\sin 2t=2\cos t\sin t,\quad \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$;

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\left[x=\frac{a}{\cos t};\ dx=\frac{a(\sin t)dt}{\cos^2 t}\right]=\int \frac{a\sin t}{\cos^2 t\frac{a}{\cos t}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}}dt=\int \frac{\sin t}{\cos t\sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}}dt=\int \frac{dt}{a}=\frac{1}{a}t=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$

3) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx=\begin{bmatrix} x=tgt \\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix}=\int \frac{1}{\cos t}\frac{1}{tg^4 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int \frac{1}{\cos t}\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int \frac{\cos tdt}{\sin^4 t}=\int \sin^{-4} td(\sin t)=-\frac{1}{3}\sin^{-3}t+C=$

$$=-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}+C=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}+C.$$

Paaiškinimai:

- $1+tg^2t=1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}$
- $\sin t-?$ $x=tgt=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$, $x^2=\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}=\frac{1}{\sin^2 t}-1$ ir $\frac{1}{\sin^2 t}=\frac{1}{x^2}+1\Rightarrow\sin^2 t=\frac{x^2}{x^2+1}$,

  taigi $\sin t=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$

DALINIO INTEGRAVIMO METODAI

Pasinaudojus šiuo metodu pagal formulę

$$\int udv=uv-\int vdu$$

integralo $\int udv$ skaičiavimas suvedamas į naujo integralo $\int vdu$ skaičiavimą.

Pointegracinį reiškinį išskaidome į dauginamuosius u ir dv. dv žymime tą (kartu su dx)dalį kurią galime suintegruoti tiesioginiu būdu. u patogu žymėti logaritmines, rodiklines, trigonometrines funkcijas.

Integralus, apskaičiuojamus šiuo metodu, galima suskirstyti į tris grupes:

1. Integralai $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, ...; čia $P(x)$ – daugianaris; žymime $u=\ln x, u=\arcsin x, u=arctgx$, ...
2. Integralai $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\cos axdx$, $\int P(x)\sin axdx$, ...; čia a – realus skaičius, $P(x)$ – daugianaris; žymime $u=P(x)$.
3. Integralai $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int\cos(\ln x)dx$,...; žymime $u=e^{ax}$ (arba $u=\cos bx$), $u=\sin(\ln x)$. Pažymėję bet kurį šios grupės integralą raide *I* ir du kartus pritaikę integravimo dalimis formulę, gausime pirmojo laipsnio lygtį integralo *I* atžvilgiu. Iš šios lygties rasime *I*.

1) $\int x\sin 3xdx=\left[\begin{array}{l}u=x,\ du=dx\\ dv=\sin 3xdx\\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right]=x\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\int\cos 3xd(3x)=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$;

2) $\int\arcsin xdx=\left[\begin{array}{l}u=\arcsin x\\ dv=dx;\ v=x\\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right]=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x-\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$

$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

3) $\int x^2e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^x+\frac{2}{27}e^{3x}+C$;

4) $J=\int e^x\sin xdx=\left[\begin{array}{l}u=e^x,\ du=e^xdx\\ dv=\sin xdx,\\ v=-\cos x\end{array}\right]=-e^x\cos x+\int\cos xe^xdx=\left[\begin{array}{l}u=e^x,\ du=e^xdx\\ dv=\cos xdx,\ v=\sin x\end{array}\right]=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

$J=e^x(\sin x-\cos x)-J\Rightarrow 2J=e^x(\sin x-\cos x)$, taigi $J=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

5) $\int arctg\sqrt{x-1}dx=xarctg\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}+C$;

N.D.!!! Apskaičiuokite integralus naudodami kintamojo keitimo metodą:

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Apskaičiuokite integralus taikydami integravimo dalimis metodą:

1. $\int x\sin 2xdx$	2. $\int xe^{-x}dx$	3. $\int xtg^2xdx$	4. $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$
5. $\int x^2\ln xdx$	6. $\int xarctgxdx$	7. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$	8. $\int \ln(x^2+1)dx$
9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$	10. $\int x^2e^{-x}dx$	11. $\int x^2\cos^2 xdx$	12. $\int e^{2x}\cos 3xdx$
13. $\int x\cos xdx$	14. $\int x3^xdx$	15. $\int x\cos^2 xdx$	
16. $\int x^2\ln(x+1)dx$	17. $\int \arccos xdx$	18. $\int \frac{x\cdot arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$	19. $\int \ln^2 xdx$
20. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$	21. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$	22. $\int e^x\sin xdx$	23. $\int \sin(\ln x)dx$