5 PASKAITA
Racionaliųjų funkcijų integravimas

Integruojant racionaliąją trupmeną $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kur $P(x)$ ir $Q(x)$ – daugianariai, reikia patikrinti ar ji taisyklinga. (Racionalioji trupmena vadinama taisyklingąja, kai skaitiklyje esančio daugianario laipsnis n yra mažesnis už vardiklyje esančio daugianario laipsnį m. Priešingu atveju racionalioji trupmena yra netaisyklingoji.) Jei ne, reikia iškelti sveiką dalį $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Sakykime, kad $\frac{P(x)}{Q(x)}$ yra taisyklingoji racionalioji trupmena, kurios skaitiklyje ir vardiklyje esantys daugianariai $P(x)$ ir $Q(x)$ neturi bendrų šaknų. Trupmenos vardiklio daugianario $Q(x)$ šaknis gali būti realios skirtingos, kai kurios realios kartotinės, jungtinės kompleksinės skirtingos ir jungtinės kompleksinės kartotinės. Realią nekartotinę šaknį α vardiklio $Q(x)$ skaidinyje atitinka dauginamasis $x-\alpha$, $n-$tojo kartotinumo realią šaknį $\beta-$ dauginamasis $(x-\beta)^n$, jungtinių kompleksinių šaknų nekartotinę porą – dauginamasis x^2+px+q, kurio diskriminantas neigiamas, $k-$tojo kartotinumo jungtinių kompleksinių šaknų porą – dauginamasis $\left(x^2+rx+s\right)^k$.

Tuomet trupmenos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ skaidymas paprasčiausiųjų trupmenų suma apibūdinamas tokiu teiginiu.

Tarkime, kad taisyklingoji racionalioji trupmena $\frac{P(x)}{Q(x)}$ išreikšta paprasčiausių trupmenų suma. Tuomet šiame dėstinyje paprasčiausiomis trupmenomis:

(1) kiekvieną vardiklio $Q(x)$ dauginamąjį $x-\alpha$ atitiks trupmena $\frac{A}{x-\alpha}$;

(2) kiekvieną vardiklio $Q(x)$ dauginamąjį $(x-\alpha)^n$ atitiks suma $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$;

(3) kiekvieną vardiklio $Q(x)$ dauginamąjį x^2+px+q atitiks trupmena $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$;

(4) kiekvieną vardiklio $Q(x)$ dauginamąjį $\left(x^2+rx+s\right)^k$ atitiks suma $\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+rx+s\right)^k}$

čia $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, B, C, M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ – realieji neapibrėžti koeficientai (kai kurie jų gali būti lygūs nuliui).

1) $\int \frac{x^3+1}{x-1}dx = I$. Išskiriame sveika dalį:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3+1 & x-1 \\ \cline{3-3}
- & \underline{x^3-x^2} & x^2+x+1 \\
 & x^2+1 & \\
- & \underline{-x^2-x} & \\
 & -x+1 & \\
- & \underline{x-1} & \\
 & 2 &
\end{array}$$

$$\frac{x^3+1}{x-1} = \left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{x-1}.$$

$$I = \int\left(x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C.$$

2) $\int \frac{x}{x^2+3x+2}dx = I$

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

Kai šaknys realios ir skirtingos

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$x = A(x+2)+B(x+1) = Ax+2A+Bx+B = (A+B)x+(2A+B)x^0$

taigi $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$.

Tai $j=\int \frac{2}{x+2}dx-\int \frac{1}{x+1}dx = 2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$;

3) $\int \frac{x^3+6x^2+12x+5}{(x+1)^2(x^2-1)}dx$

kai šaknų tarpe yra kartotinių $(x+1)^2(x^2-1)=(x+1)^2(x+1)(x-1)=(x+1)^3(x-1)$

$$\frac{x^3+6x^2+12x+5}{(x+1)^3(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}$$

$$x^3+6x^2+12x+5=A(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)^2(x-1)+D(x+1)^3=A(x-1)+B(x^2-1)+C(x^3+x^2-x-1)+$$
$$+D(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$\begin{cases} 1=C+D \\ 6=B+C+3D \\ 12=A-C+3D \\ 5=-A-B-C+D \end{cases}$$

Gauname $A=1 \quad B=-1 \quad C=-2 \quad D=3$.

$$\frac{x^3+6x^2+12x+5}{(x+1)^3(x-1)}=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}$$

$$J=\int\frac{dx}{(x+1)^3}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-2\ln|x+1|+3\ln|x-1|+C;$$

4) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=J$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

$$2x^2-3x-3=A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=A(x^2-2x+5)+B(x^2-x)+C(x-1)$$

$$\begin{cases} 2=A+B \\ -3=-2A-B+C \\ -3=5A-C \end{cases}$$

Gauname $A=-1 \quad B=3 \quad C=-2$.

$$J=-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx=-\ln|x-1|+\int\frac{\frac{3}{2}(2x-2)+1}{x^2-2x+5}dx=-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\int\frac{(2x-2)}{x^2-2x+5}dx+\int\frac{dx}{(x-1)^2+2^2}=$$
$$=-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|+\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C$$

5) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=J$

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \hline -\underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ x^4+4x^3-8 & \\ -\underline{x^4\ \ -4x^2} & \\ 4x^3+4x^2-8 & \\ -\underline{4x^3-16x} & \\ 4x^2+16x-8 & \end{array}$$

$$J=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)}dx=$$

$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$ Subendravardiklinę gauname $\frac{A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)}{x(x+2)(x-2)}$, taigi

$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)$

$$\begin{cases} 4=A+B+C \\ 16=-2B+2C \\ -8=-4A \end{cases}$$

Gauname $A=2 \quad B=-3 \quad C=5$.

$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}$

Taigi mūsų integralas lygus: $J=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+C$;

6) $\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\frac{dx}{x^2(x-1)(x+1)}=J=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

7) $\int\frac{3x+2}{x^3-8}dx=\int\frac{3x+2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx=J=\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x^2+2x+4|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

8) $\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx=J=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg}(x)-\frac{x+1}{2(x^2+1)}+C$

N.D.!!!

Apskaičiuokite integralus

1. $\int\frac{x}{x+4}dx$	2. $\int\frac{x}{2x+1}dx$	3. $\int\frac{x^4}{1-x}dx$	4. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$
5. $\int\frac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$	6. $\int\frac{xdx}{x^4-5x^2+4}$	7. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$	8. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$
9. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$	10. $\int\frac{dx}{x^2+x^4}$	11. $\int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$	12. $\int\frac{dx}{x(x^2+2)^2}$
13. $\int\frac{3+x}{3-x}dx$	14. $\int\frac{x+2}{2x-1}dx$	15. $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$	16. $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$
17. $\int\frac{dx}{x(x-1)}$	18. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$	19. $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$	