

7 PASKAITA

Apibrėžtinio integralo skaičiavimas

Jei integralinė suma $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ turi baigtinę ribą, nepriklausiančią nei nuo intervalo skaidymo būdo, nei nuo taškų q_i parinkimo, tai ši riba vad. apibrėžtiniu integralu.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx; \quad \lambda = \max_{i=\sqrt{n}} \Delta x_i$$

a ir b – apatinis ir viršutinis rėžiai. Tolydi atkarpoje $[a, b]$ f-ja yra integruojama.

Apibrėžtinio integralo geometrinė prasmė:

$$S = \int_a^b f(x) dx - \text{kreivinės trapecijos plotas.}$$

Savybės :

Jei $f(x)$ ir $g(x)$ integruojamos atkarpoje $[a, b]$ f-jos, tai:

$$1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$5) \text{ Jei } f(x) \geq 0 \text{ atkarpoje } [a; b], \text{ tai } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$6) \text{ Jei } f(x) \geq g(x), \text{ tai } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

7) Apibrėžtinio integralo įvertis.

Tarkime, kad $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ ir $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$, $x \in [a; b]$. Tada

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

8) Vidutinės reikšmės teorema.

Jei f-ja $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai egzistuoja tos atkarpos taškas c , kuriame

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

$$\text{Iš čia } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Skaičius $f(c)$ vad. vidutinė f-jos $f(x)$ reikšmė atkarpoje $[a; b]$.

Niutono – Leibnico formulė:

Jei f-ja $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$ ir $F(x)$ – kuri nors jos pirmykštė funkcija šioje atkarpoje, tai

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Apskaičiuokite integralus taikydami **Niutono- Leibnico** formulę :

$$1) \int_1^2 \sqrt[3]{\ln x} d \ln x; \quad 2) \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_1^e \frac{d \ln x}{(1+\ln^2 x)} = \arctg \ln x \Big|_1^e = \arctg \ln e - \arctg \ln 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx; \quad 4) \int_1^2 \frac{x-1}{4x^3+x} dx$$

5) Apskaičiuoti apibrėžtinio integralo įvertį, kai $f(x) = \sqrt{9+x^4}$ intervale $[0;2]$.

6) Apskaičiuokite f -jos vidutinę reikšmę

$$f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x, \quad [0, 2\pi]$$

Kintamųjų keitimo metodas

Tarkime kad, integrale $\int_a^b f(x)dx$ kintamasis x pakeistas pagal formulę $x = \varphi(t)$. Jeigu :

1) $f(x)$ tolydi $[a;b]$

2) $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t)$ tolydžios atkarpoje $[\alpha; \beta]$

3) $\varphi(t)$ reikšmių aibė yra atkarpa $[a;b]$, be to, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tai

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad \text{Apskaičiuoti: } \int_5^{13} \frac{xdx}{\sqrt{x-4}};$$

Integravimas dalimis

Sakykime, kad $u(x)$ ir $v(x)$ – diferenciojamos atkarpoje $[a;b]$ funkcijos. Tuomet

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$2) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \int_0^{2\pi} x^2 d \sin x = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx^2 = 0 - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{2\pi} x d \cos x =$$

$$= 2x \cos x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx = 4\pi - 2 \sin x \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$3) \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\text{Integralai } \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \text{ ir } \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$$

Panaudodami formules

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, n - \text{nelyginis} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, n - \text{lyginis} \end{cases}$$

Apskaičiuokime

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = \frac{4!!}{5!!} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{8}{15} \quad 2) \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ x = 2t \\ dx = 2dt \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = 2 \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}$$

