Netiesioginiai integralai

Netiesioginiai integralai yra 2 tipų:

1) su begaliniais rėžiais
2) trūkių f-jų

1

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b)-F(a)$$

Spendžiant uždavinius sakoma: jei egzistuoja tokia integralo baigtinė riba, tai netiesioginis integralas konverguoja, jei ne – diverguoja.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Tarkime, kad f-ja tolydi intervale $(-\infty;+\infty)$, tada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

1) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$; 4) $\int_0^{+\infty} e^{2x}dx$; 5) $\int_0^{+\infty} x\sin x dx$; 6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{4+x^6}$.

1T: jei visoms $x \geq a$ tenkinama sąlyga $0\leq f(x)\leq \varphi(x)$, tai konvertuojant $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$, konvertuos ir $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. (diverguojant $\int_a^{\infty} f(x)dx$, diverguos ir $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$)

2T: jei su visais $x\geq a$, tenkinama nelygybė $0\leq\varphi(x)\leq f(x)$, tai diverguojant $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$, diverguos ir $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

3T: jei konvertuoja $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, tai konvertuos ir $\int_a^{\infty} f(x)dx$ (absoliučiai).

4) Ištirti konvergavimą: $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$. Kadangi $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$, kai $x\geq 1$, o integralas $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0+1$ *konverguoja*, tai konverguoja ir $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$. Todel duotasis integralas konverguoja absoliuciai.

2

– Jei f-ja $f(x)$ yra trūki taške $x=a$, tai $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon->0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon->0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^b = F(b)-\lim_{\varepsilon->0}F(a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$

– Jei f-ja $f(x)$ trūki taške $x=b$, tai $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon->0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon->0}F(b-\varepsilon)-F(a)$, $\varepsilon>0$

– Jei f-ja $f(x)$ trūki vidiniame atkarpos $[a;b]$ [a;b] taške $x=c$, tai

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1->0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2->0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx, \varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0.$$

Jeigu f-jos $f(x)$ ir $g(x)$ intervalo $(a;\ b]$ taške $x = a$ turi trūkio tašką ir su visais x teisinga nelygybe: $0 \le f(x) \le g(x)$, tai konverguojant integralui $\int_a^b g(x)dx$, konverguoja ir $\int_a^b f(x)dx$; diverguojant $\int_a^b f(x)dx$, diverguoja ir $\int_a^b g(x)dx$.

Ištirti konvergavima:

1) $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$; 4) $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$.

ND!!!!. Ištirti konvergavimą:

1) $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 3) $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \cdot dx$; 4) $\int_0^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; 5) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tgx \cdot dx = \lim_{\varepsilon -> 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} tgx \cdot dx = \begin{bmatrix} t = tgx;\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2};\ x = 0, t = 0 \\ x = arctgt \qquad \mathrm{x} = \dfrac{\pi}{2}, t = +\infty \end{bmatrix} = \lim_{b -> +\infty} \int_a^b \frac{t \cdot dt}{1+t^2} = \lim_{b -> +\infty} \frac{1}{2} \ln \left|1+t^2\right| \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\infty) - \frac{1}{2}\ln 1 = +\infty - diverg\ .$$