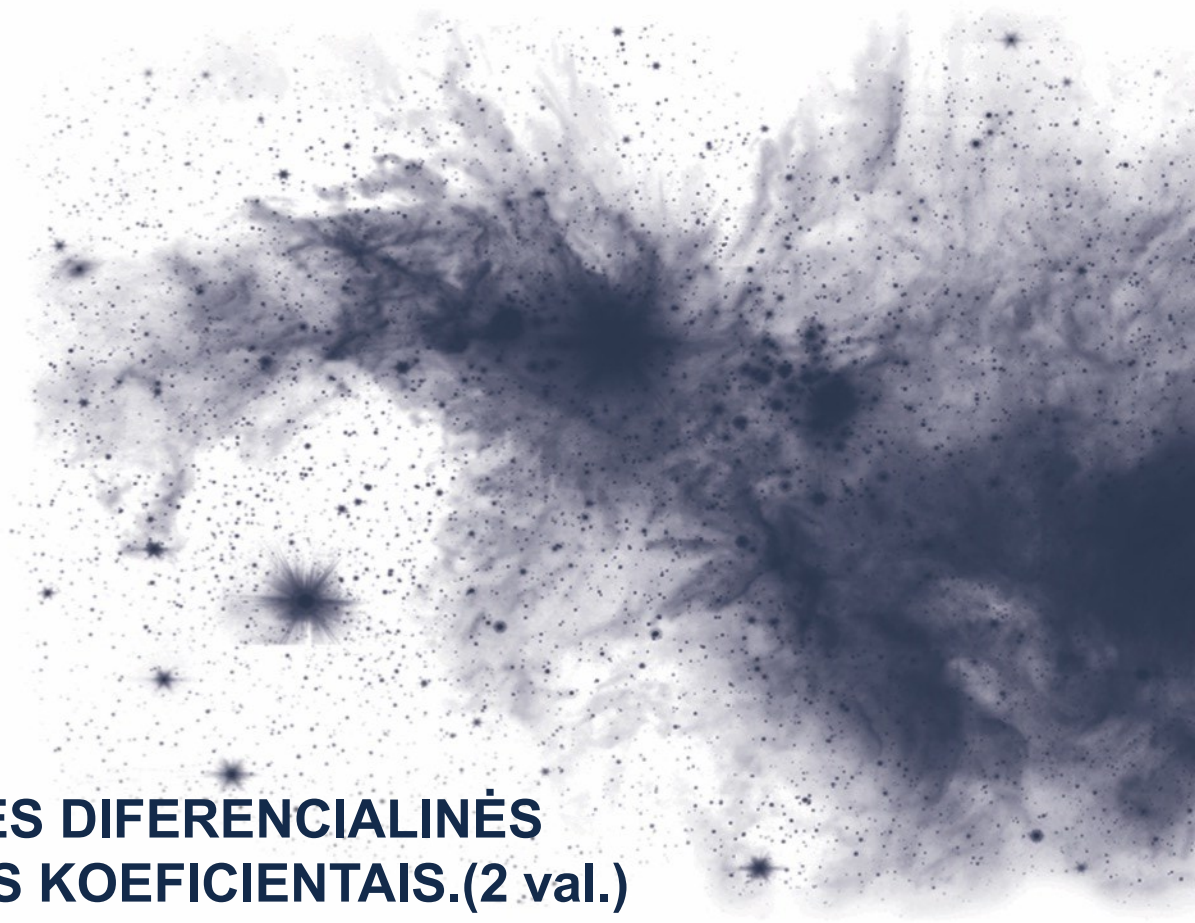


10 PASKAITA

**ANTROS EILĖS TIESINĖS DIFERENCIALINĖS
LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.(2 val.)**



- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;

(du atvejai su įrodymu, trečiasis, kai charakteringosios lygties šaknys kompleksinės – be įrodymo)

- Antros eilės tiesinės nehomogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;

(mokėti rasti atskirąjį sprendinį, kai $f(x) = c$ arba $f(x) = x$ be formulų lapo)

ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Spręsimė lygtį

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

čia p, q - realieji skaičiai.

Norėdami sužinoti (1) lygties bendrąjį sprendinį, turime rasti du tiesiškai nepriklausomus atskiruosius sprendinius y_1, y_2 .



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Atskiro sprendinio ieškosime, tarę, kad jis apibrėžiamas formule

$$y = e^{kx}, k = \text{const}.$$

Tuomet

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}.$$

Įrašę y, y', y'' išraiškas į (1) lygtį, gauname

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Kadangi $e^{kx} \neq 0$, tai

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (2)$$

Todėl, jei k yra (2) lygties šaknis, tai e^{kx} yra (1) lygties sprendinys.

(2) lygtis vadinama (1) lygties **charakteringąja lygtimi**.

Charakteringosios lygties šaknis pažymėkime k_1, k_2 ir nagrinėkime tris atvejus.



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

- 1) Charakteringosios lygties šaknys k_1, k_2 yra realios ir skirtingos: $k_1 \neq k_2$.

Šiuo atveju atskirieji sprendiniai

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Rasime Vronskio determinantą, sudarytą iš šių sprendinių:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x}.$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

$e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ su bet kuria x reikšme.

Kadangi $k_1 \neq k_2$, tai skirtumas $k_2 - k_1 \neq 0$.

Tuomet $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Taigi, iš tiesiškai nepriklausomų sprendinių galima sudaryti (1) lygties bendrąjį sprendinį

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

2) Charakteringosios lygties šaknys yra lygios, t.y.
 $k_1 = k_2 = k$.

Šiuo atveju turime vieną atskirąjį sprendinį $y_1 = e^{kx}$.
Antrąjį atskirtąjį sprendinį rasime konstantų
variacijos metodu.

Tarkime, kad šis sprendinys turi pavidalą $y_2 = Ce^{kx}$,
čia $C = C(x)$ - nežinoma funkcija. Tada

$$y_2' = C'e^{kx} + Cke^{kx},$$
$$y_2'' = C''e^{kx} + 2C'ke^{kx} + Ck^2e^{kx}.$$

ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Išstatę y_2'', y_2', y_2 į (1) lygtį, gauname

$$\begin{aligned} &C''e^{kx} + 2C'ke^{kx} + Ck^2e^{kx} + \\ &+ p(C'e^{kx} + Cke^{kx}) + qCe^{kx} = 0 \quad | : e^{kx} \neq 0 \\ &C'' + C'(2k + p) + C(k^2 + pk + q) = 0. \end{aligned}$$

Kadangi k – charakteringosios lygties šaknis, tai $k^2 + pk + q = 0$.

Pagal Vieto teorema, $p = -(k_1 + k_2) = -2k$, todėl $2k + p = 0$.

Tuomet $C'' = 0$. Todėl $C' = A = \text{const}$ ir $C = Ax + A_1$ ($A_1 = \text{const}$).

ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Vadinasi, $y_2 = (Ax + A_1)e^{kx}$ ir

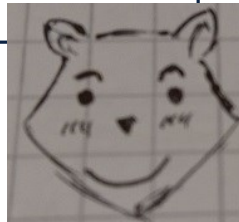
$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 (Ax + A_1) e^{kx} = \\ &= (C_2 Ax + (C_1 + C_2 A_1)) e^{kx} = (\tilde{C}_1 + x \tilde{C}_2) e^{kx}, \end{aligned}$$

čia $\tilde{C}_1 = C_1 + C_2 A_1$, $\tilde{C}_2 = C_2 A$.

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ yra laisvos konstantos, tai toliau vietoj jų rašysime tiesiog C_1, C_2 . Kadangi $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$, tai sprendiniai tiesiškai nepriklausomi ir

(1) lygties bendrasis sprendinys lygus

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

3) Charakteringosios lygties šaknys k_1, k_2 sudaro kompleksinių šaknų porą, t.y. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Šiuo atveju (1) lygties bendrasis sprendinys lygus

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Pavyzdys. Raskite lygties

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

atskirąjį sprendinį, kai

$$y(0) = 1, y'(0) = -1.$$



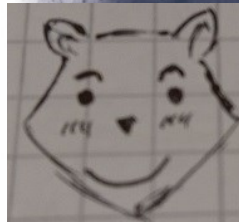
ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Nagrinėsime lygtį

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (1)$$

Teorema: Jei $\bar{y}$ – bendrasis homogeninės lygties $y'' + py' + qy = 0$ sprendinys, y^* – kuris nors atskirasis nehomogeninės lygties $y'' + py' + qy = f(x)$ sprendinys, tai nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys lygus

$$y = \bar{y} + y^*.$$

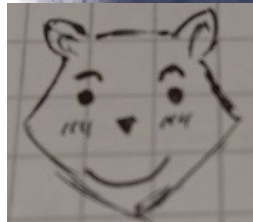


ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

(1) lygties bendrąjį sprendinį galime rasti taikydami **konstantų variacijos metodą**,

Atskirais atvejais (1) lygties atskirąjį sprendinį galime rasti taikydami **neapibrėžtųjų koeficientų metodą**, jei

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

I. Tarkime, kad $\beta = 0$

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

čia α – realusis skaičius, $P_n(x)$ - n -ojo laipsnio daugianaris.



ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Skirsime šiuos atvejus:

- a) kai α nesutampa su charakteringosios lygties $k^2 + pk + q = 0$ šaknimi, atskirąjį sprendinį pasirenkame tokį:

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

b) kai α sutampa su viena charakteringosios lygties šaknimi, atskirąjį sprendinį pasirenkame tokį:

$$y^* = e^{\alpha x} x Q_n(x)$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

- c) kai α sutampa su kartotine charakteringosios lygties šaknimi, atskirąjį sprendinį pasirenkame tokį:

$$y^* = e^{\alpha x} x^2 Q_n(x)$$



ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

II. Tarkime, kad

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

čia

α, β – realieji skaičiai,

$P_n(x), Q_m(x)$ - atitinkamai n -ojo ir m -ojo laipsnio daugianariai.

Pažymėkime

$$s = \max\{n, m\}.$$

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Skirsime du atvejus:

- a) kai $\alpha + i\beta$ nėra charakteringosios lygties šaknis,
atskirąjį sprendinį pasirenkame tokį:

$$y^* = e^{\alpha x} (M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x);$$

čia $M_s(x), N_s(x)$ - s -ojo laipsnio daugianariai su
neapibrėžtais koeficientais.

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

- b) kai $\alpha + i\beta$ yra charakteringosios lygties šaknis, atskirąjį sprendinį pasirenkame tokį:

$$y^* = xe^{\alpha x} (M_S(x) \cos \beta x + N_S(x) \sin \beta x).$$

Įrašę y^* bei jo išvestinių išraiškas į lygtį bei prilyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, randame daugianarių $M_S(x), N_S(x)$ koeficientus.

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS.

Pavyzdys. Raskite lygties

$$y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$$

bendrąjį sprendinį neapibrėžtųjų koeficientų metodu.

ND

Rasti antrosios eilės
tiesinių **nehomogeninių** su **pastoviais** koeficientais
bendrąjį sprendinį:

$$y'' + 9y = e^x \cos 3x$$

Atsakymas!

- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;
- Antros eilės tiesinės nehomogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;

- Pirmojo tipo kreiviniai integralai;
- Jų apskaičiavimas ir taikymai.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt