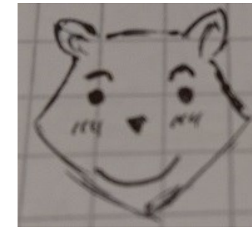
11 PASKAITA

PIRMOJO TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI. JŲ APSKAIČIAVIMAS IR TAIKYMAI.(2 val.)

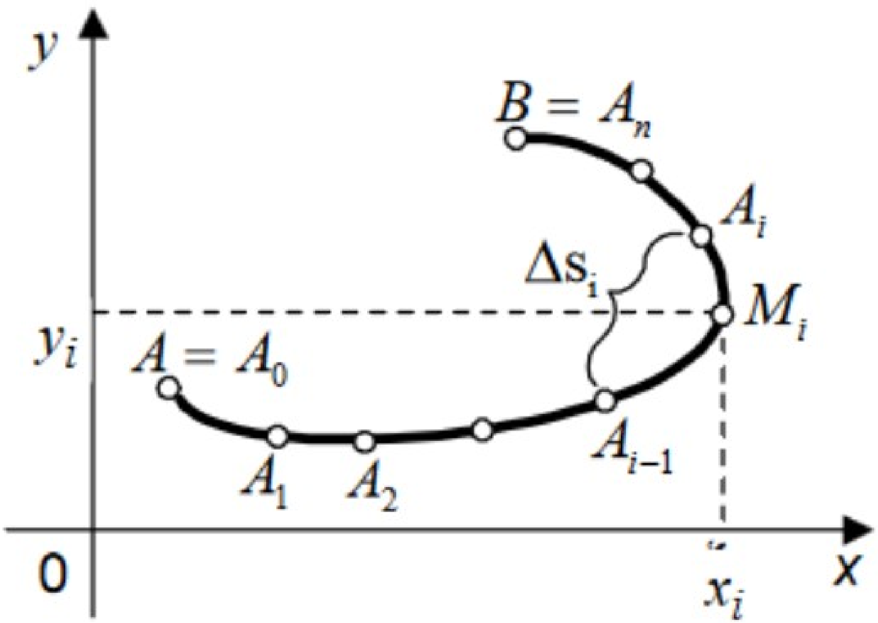
EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Pirmojo tipo kreivinio integralo sąvoka (mokėti sudaryti integralinę sumą) ir apskaičiavimas (be įrodymo);
- Kreivės lanko masė;
- Kreivės lanko ilgis.

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Tarkime, kad funkcija $f(x, y)$ yra apibrėžta ir tolydi glodžios kreivės L lanko AB taškuose.

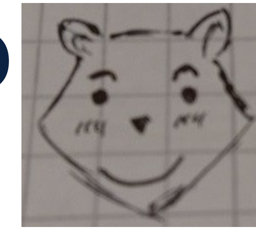


Lanką AB taškais $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$ padaliname į n dalinių lankų $A_{i-1}A_i$, kurių ilgiai yra Δs_i.

Kiekviename daliniame lanke laisvai pasirenkame tašką $M_i(x_i, y_i)$.

Apskaičiuojam funkcijos reikšmes šiuose taškuose $f(M_i)$.

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Sudarome integralinę sumą $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta s_i$.

<u>Apibrėžimas</u>: Baigtinė integralinės sumos riba, kai $\max \Delta s_i \to 0$, nepriklausanti nuo lanko AB padalinimo į dalinius lankus bei taškų $M_i(x_i, y_i)$ parinkimo, vadinama funkcijos $f(x, y)$ **pirmojo tipo kreiviniu integralu kreive L** ir žymima $\int_L f(x, y) ds$ arba $\int_{AB} f(x, y) ds$.

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA

<u>Teorema</u>: Jei kreivė L yra glodi, o funkcija $f(x,y)$ tolydi šios kreivės taškuose, tai egzistuoja funkcijos $f(x,y)$ pirmojo tipo kreivinis integralas.

Jei L – glodi kreivė erdvėje R^3, o $f(x,y,z)$ – tolydi funkcija, apibrėžta kreivės L taškuose, tai funkcijos $f(x,y,z)$ pirmojo tipo kreivinis integralas kreive L apibrėžiamas analogiškai:

$$\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i .$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Pirmojo tipo kreivinio integralo savybės:

1) Jei $f(x,y)$ ir $g(x,y)$ – tolydžios funkcijos, apibrėžtos kreivės L taškuose, o α, β – realieji skaičiai, tai
$$\int_L \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)ds = \alpha \int_L f(x,y)ds + \beta \int_L g(x,y)ds.$$

2) Jei integravimo kreivė L sudaryta iš baigtinio skaičiaus glodžiųjų lankų $L_1, \ldots, L_k$, tai
$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \ldots + \int_{L_k} f(x,y)ds.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SAVYBĖS

3) Pirmojo tipo kreivinio integralo skaitinė reikšmė nepriklauso nuo kelio AB krypties, t.y.

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds.$$

4) Jei $f(x,y)=1\ \forall (x,y)\in L$, tai

$$\int_{L} ds = l,$$

čia l – kreivės L ilgis (**geometrinė pirmojo tipo kreivinio integralo prasmė**).

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SAVYBĖS

5) **Palyginimo savybė.** Jei $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in L$, tai

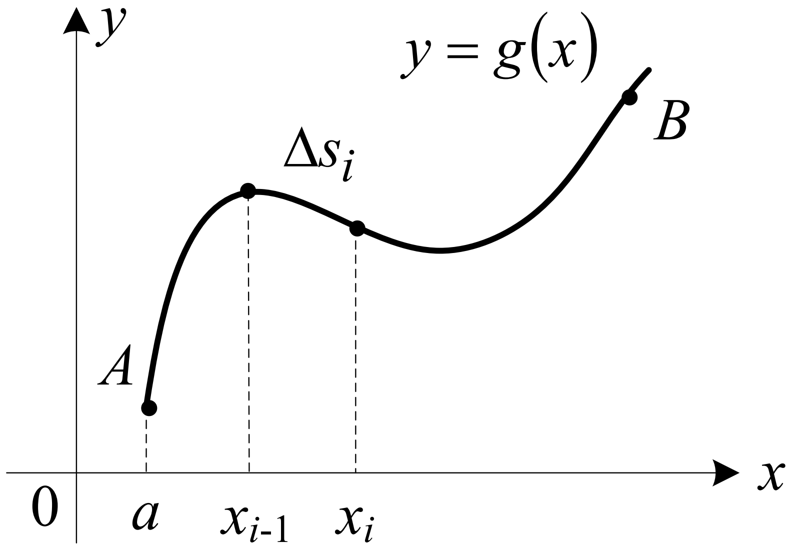
$$\int_L f(x,y)ds \geq \int_L g(x,y)ds.$$

6) **Integralo modulio įvertis**: $\left| \int_L f(x,y)ds \right| \leq \int_L |f(x,y)| ds.$

7) **Vidutinės reikšmės terema.** Jei $f(x,y)$ tolydi kreivės L taškuose, tai egzistuoja toks taškas $M(x_0, y_0) \in L$, kad

$$\int_L f(x,y)ds = l \cdot f(x_0, y_0), \quad \text{čia } l \text{ – kreivės } L \text{ lanko ilgis.}$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS



Tarkime, kad plokštumoje xOy duota glodi kreivė L, kurios lygtis $y = g(x)$, $x \in [a,b]$, o $f(x,y)$ – tolydi kreivės L taškuose funkcija. Tada kreivės taško (x,y) koordinatės bus $(x, g(x))$ ir $f(x,y) = (x, g(x))$, kai $x \in [a,b]$.

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

Pasinaudoję kreivės lanko ilgio apskaičiavimo formule

$$\Delta s_i = \sqrt{1+\left(g'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i, \quad c_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right)$$

integralinę sumą užrašome taip:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, g(x_i)\right)\sqrt{1+\left(g'(x_i)\right)^2}\,\Delta x_i$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

Perėję prie ribos, kai $\max \Delta s_i \to 0$ (tuo pačiu ir $\max \Delta x_i \to 0$), pirmojo tipo kreivinį integralą išreiškiame apibrėžtiniu integralu

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, g\left(x_i\right)\right)\sqrt{1+\left(g'\left(x_i\right)\right)^2}\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f\left(x, g(x)\right)\sqrt{1+\left(g'\left(x\right)\right)^2}\,dx$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

Taigi,

Kai duota kreivė $y = g(x)$:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x, g(x)\big)\sqrt{1 + \big(g'(x)\big)^2}dx$$

Kai duota kreivė $x = \psi(y)$:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f\big(\psi(y), y\big)\sqrt{1 + \big(\psi'(y)\big)^2}dy$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

- Jei glodi kreivė L išreikšta parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

tai

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

- Jei glodi kreivė L išreikšta lygtimi $\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$

tai

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

Jei $L \subset R^3$ – kreivė, išreikšta parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

tai

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt\,.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

Pavyzdžiai: 1. Apskaičiuokite pirmojo tipo kreivinį integralą:

$\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, L: tiesės $y=\frac{x}{2}-2$ atkarpa tarp taškų $A(0;-2)$ ir $B(4;0)$.

$$y'_x=\frac{1}{2};\quad ds=\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx;\quad 0\le x\le 4$$

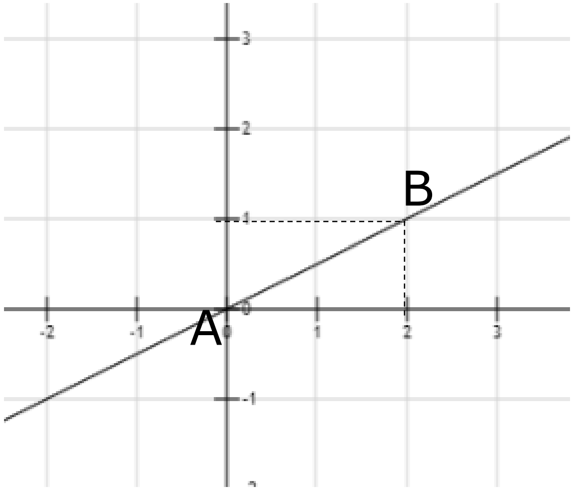
$$\int\limits_L \frac{ds}{x-y}=\int\limits_0^4 \frac{1}{x-\left(\frac{x}{2}-2\right)}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4 \frac{dx}{\frac{x}{2}+2}=\sqrt{5}\ln\left|\frac{x}{2}+2\right|\Bigg|_0^4=\sqrt{5}\ln 2$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

2. Apskaičiuokite pirmojo tipo kreivinį integralą:

$$\int_L (x-y)\,ds,$$

kai L yra atkarpą nuo $A(0;0)$ iki $B(2;1)$.



$$y = kx + b = \frac{1}{2}x; \qquad y'_x = \frac{1}{2};$$

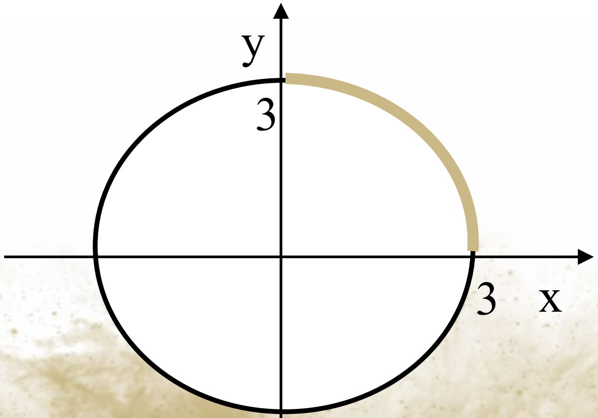
$$\int_L (x-y)ds = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

3. Apskaičiuokite pirmojo tipo kreivinį integralą:

$$\int_L (x^2 + y^2)\,ds,$$

kai L kreivės $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ lankas, esantis I ketvirtyje



PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

$$y'_t(t) = 3\cos t;\ x'_t(t) = -3\sin t;$$

$$\int_L (x^2 + y^2)ds =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\right)\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9(\cos^2 t + \sin^2 t)\sqrt{9(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \frac{27\pi}{2}.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

4. Apskaičiuokite pirmojo tipo kreivinį integralą:

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,$$

$$L\colon\ x = a(\cos t + t \cdot \sin t),\ y = a(\sin t - t \cdot \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2(\cos t+t\cdot\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cdot\cos t)^2}=a\sqrt{1+t^2}$$

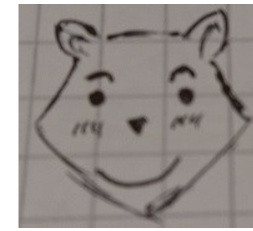
$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=$$

$$=\sqrt{(a(-\sin t+\sin t+t\cdot\cos t))^2+(a(\cos t-\cos t+t\cdot\sin t))^2}dt=$$

$$=at\cdot dt$$

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+t^2}\cdot at\cdot dt=\frac{a^2}{2}\left.\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{2\pi}=\frac{a^3}{3}\left(\left(1+2\pi\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI



1) **Kreivės lanko ilgis** $l = \int\limits_L ds = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i$,

(kai $f(x, y) = 1$!)

2) **Materialiosios kreivės lanko masė.**

Tarkime, kad erdvinės kreivės L taškuose apibrėžta tolydžioji funkcija $\gamma(x, y, z) > 0$, kuri apibūdina materialiosios kreivės masės pasiskirstymo tankį.

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI

Rasime kreivės masę m. Kreivę L suskaidome į n dalinių lankų Δs_i. Kiekviename daliniame lanke laisvai pasirenkame tašką $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Tarkime, kad daliniame lanke Δs_i masės tankis yra pastovus ir lygus $\gamma(x_i, y_i, z_i)$. Tuomet i–ojo lanko masė apytiksliai lygi

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i,$$

o kreivės masė

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI

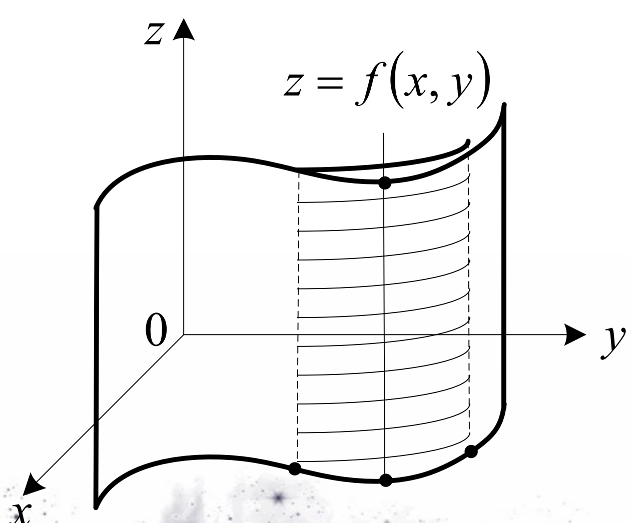
Kadangi funkcija $\gamma(x, y, z)$ yra tolydžioji, tai, perėję prie ribos, kai $\max \Delta s_i \to 0$, gauname

$$m = \int_L \gamma(x, y, z) ds.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI

3) Cilindrinio paviršiaus plotas.

Nagrinėkime cilindrinį paviršių, kurio vedamoji yra kreivė L, esanti plokštumoje xOy, sudaromoji – lygiagreti Oz ašiai.



Kreivės L taškuose apibrėžta neneigiama tolydi funkcija $z = f(x, y)$. Cilindrinio paviršiaus, esančio tarp $z = 0$ ir $z = f(x, y)$, plotas:

$$S = \int_L f(x, y) ds$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI

4) Materialios kreivės masės centro koordinatės.

Jei materialios erdvinės kreivės L masės pasiskirstymo tankis $\gamma = \gamma(x, y, z)$ yra tolydžioji funkcija, tai šios kreivės masės centro koordinatės:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_L x\gamma(x, y, z)ds; \; y_C = \frac{1}{m}\int_L y\gamma(x, y, z)ds;$$

$$z_C = \frac{1}{m}\int_L z\gamma(x, y, z)ds.$$

PIRMOJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO TAIKYMAI

5) **Plokščios kreivės lanko inercijos momentai** koordinačių ašių ir koordinačių pradžios taško atžvilgiu:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) ds; \; I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) ds;$$

$$I_0 = \int_L \left(x^2 + y^2 \right) \gamma(x, y) ds.$$

KĄ IŠMOKOM

- Pirmojo tipo kreivinio integralo sąvoka ir apskaičiavimas;
- Kreivės lanko masė;
- Kreivės lanko ilgis.

KITA PASKAITA

- Antrojo tipo kreivinio integralo sąvoka ir apskaičiavimas;
- Kintamosios jėgos (jėgų lauko) darbas.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

1. Apskačiuokite integralą $\int_L \sqrt{y}ds$, kai $L: y = 4x^2, 0 \leq x \leq 1$.

2. Apskačiuokite integralą $\int_L (x - y)ds$, kai L tiesės $3\mathrm{x} - 4\mathrm{y} = 0$ atkarpa nuo koordinačių pradžios taško iki taško $B(4;3)$.

3. Apskačiuokite integralą $\int_L 3y\sqrt{x+1}ds$, kai $L: y = 2\sqrt{x}, 3 \leq x \leq 5$.

4. Apskačiuokite integralą $\int_L yds$, kai L tiesės $\mathrm{y} = 2x$ atkarpa tarp taškų $A(1;2)$ ir $B(3;6)$.

5. Apskačiuokite integralą $\int_L xds$, kai L kreivės, $x = \cos 2t, y = \sin 2t$, kai $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ lankas.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt