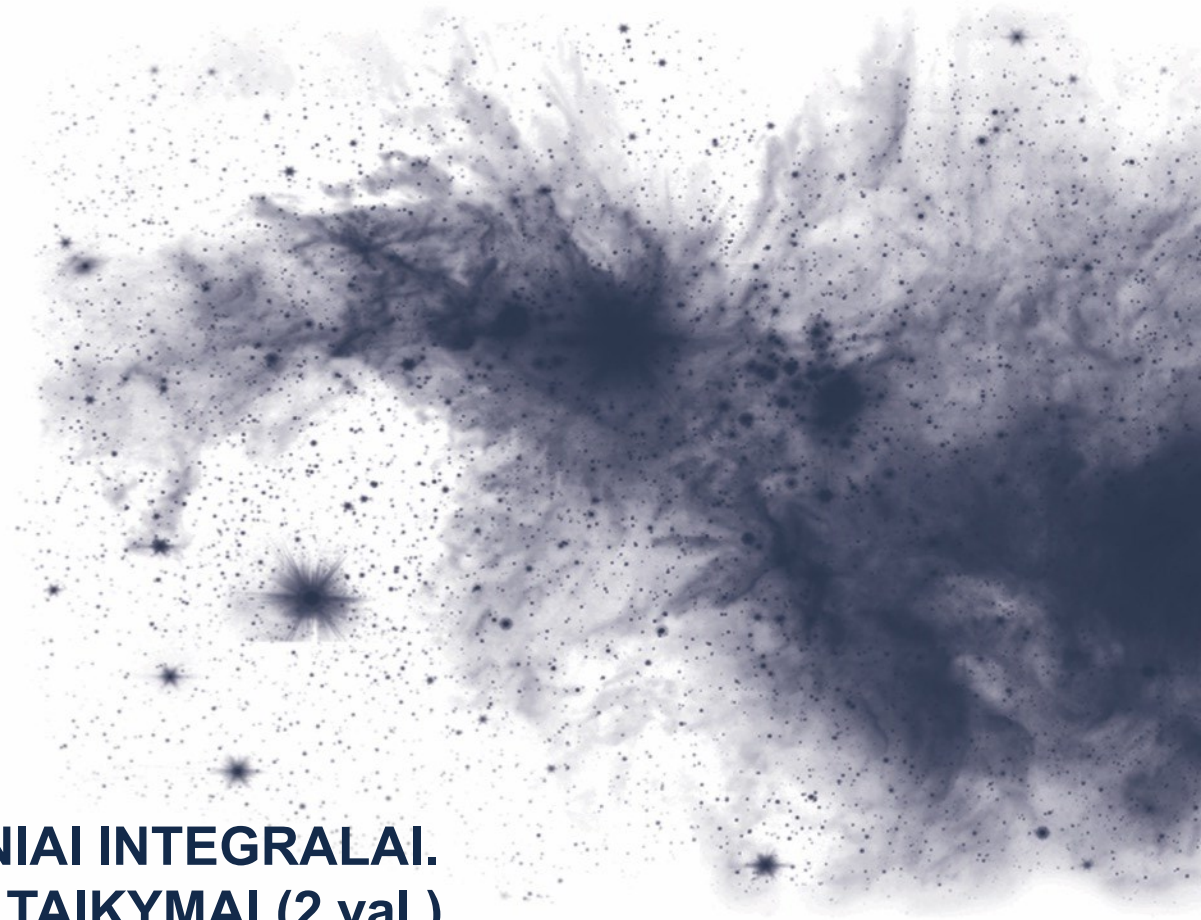


12 PASKAITA

**ANTROJO TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI.
JŲ APSKAIČIAVIMAS IR TAIKYMAI.(2 val.)**



EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Antrojo tipo kreivinio integralo sąvoka (mokėti sudaryti integralinę sumą) ir apskaičiavimas (be įrodymo);
- Kintamosios jėgos (jėgų lauko) darbas.

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



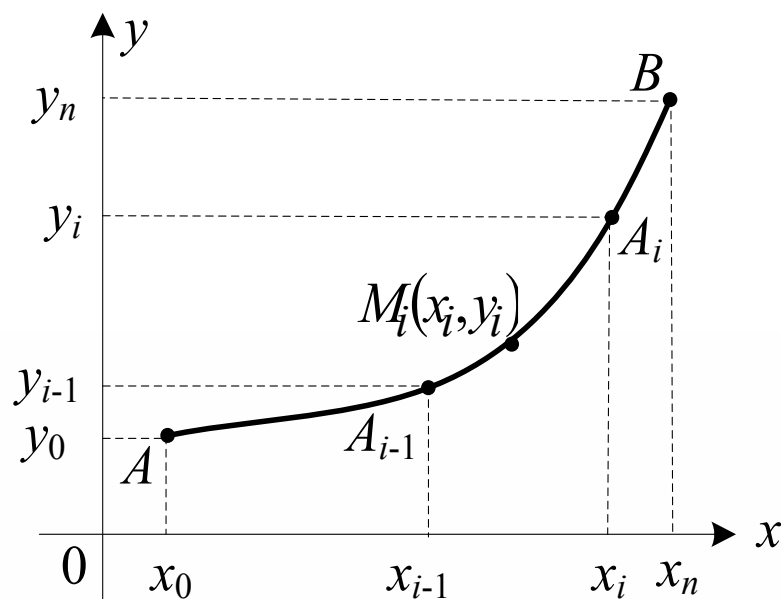
Apibrėžimas: Kreivę $L = AB$ vadinsime *orientuota*, kai nurodyta, kuris iš dviejų taškų A ir B yra kreivės pradžios taškas.

Apibrėžimas: Kai kreivė L yra uždara, susitarta *teigiamąja uždarosios kreivės L apėjimo kryptimi* vadinti tą, kuria taškas judėdamas kontūru L turi kairėje pusėje kreivės L ribojamą sritį (prieš laikrodžio rodyklę).

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Tarkime, turime glodžią orientuotą kreivę $L = AB$, kurios taškuose apibrėžtos dvi tolydžiosios funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$.



Taškais $A_i(x_i, y_i)$ kreivę $L = AB$ padaliname į n dalių $A_{i-1}A_i$. Tarkime, kad dalinio lanko $A_{i-1}A_i$ ilgis lygus Δs_i . Pažymėkime

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Kiekvienoje dalyje $A_{i-1}A_i$ laisvai pasirenkame tašką $M_i(x_i, y_i)$ ir apskaičiuojame funkcijų reikšmes šiame taške $P(x_i, y_i), Q(x_i, y_i)$.

Sudarome integralinę sumą

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i).$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Apibrėžimas: Baigtinė integralinės sumos riba, kai $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, nepriklausanti nuo orientuotos kreivės L suskaidymo į dalis ir taškų $M_i(x_i, y_i)$ parinkimo, vadinama **antrojo tipo kreiviniu integralu kreive $L = AB$** ir žymima

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA

Kai $Q(x, y) \equiv 0$, gauname kreivinį integralą: $\int_{AB} P(x, y)dx,$

kai $P(x, y) \equiv 0$, gauname kreivinį integralą: $\int_{AB} Q(x, y)dy.$

Iš antrojo tipo kreivinio integralo išplaukia, kad

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



Apibrėždami pirmojo tipo kreivinį integralą funkcijos reikšmę taške $M_i(\xi_i, \eta_i)$ dauginame iš dalinio lanko Δs_i ilgio. Kadangi lanko ilgis Δs_i nepriklauso nuo integravimo krypties, tai tos **krypties pakeitimas neturi įtakos** pirmojo tipo kreiviniam integralui.

Apibrėždami antrojo tipo kreivinį integralą funkcijų reikšmes taške $M_i(x_i, y_i)$ dauginame iš lanko Δs_i projekcijų Δx_i ir Δy_i . **Pakeitę integravimo kreivę $L = AB$ kryptį, pakeičiame ir lanko Δs_i projekcijų ženklus.**

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO SĄVOKA



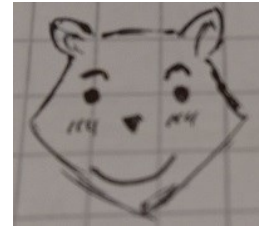
Todėl

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Analogiškai apibrėžiame antrojo tipo kreivinį integralą erdvine kreive L :

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS



Nagrinėkime integralą $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Tarkime, kad

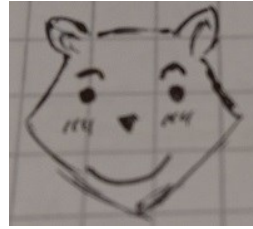
kreivės L lanko AB parametrinės lygtys yra

$$x = x(t), y = y(t),$$

lanko pradžios tašką A atitinka parametro t reikšmė t_1 , o lanko galo tašką B - reikšmė t_2 . Be to, $x(t)$, $y(t)$ ir $x'(t)$, $y'(t)$ yra tolydžios atkarpoje $[t_1, t_2]$, o funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ tolydžios kreivės L taškuose. Tai

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t))dt$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS



Jei kreivė L išreikšta lygtimi $y = y(x)$, o judėjimą nuo taško A į tašką B atitinka x kitimas nuo a iki b , tai

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x))dx.$$

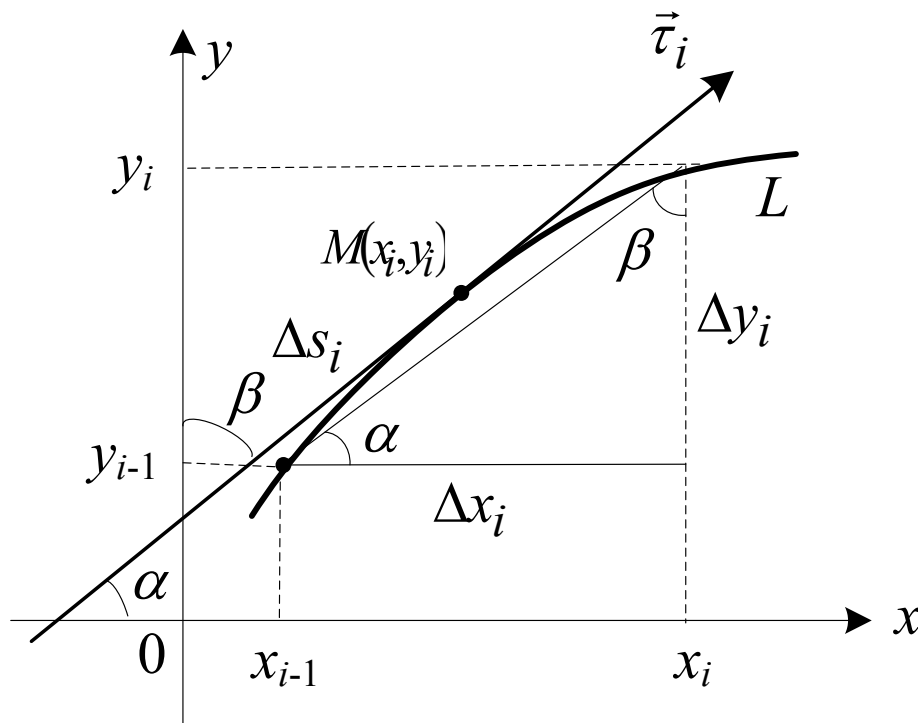
ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO APSKAIČIAVIMAS



Pavyzdys: Apskaičiuokite integralą $\int_L (2x + 3y^2)dx + (6xy - 1)dy$ nuo taško $A(1;1)$ iki taško $B(2;4)$, kai integravimo kelias L nusakomas parabolės $y = x^2$ lanku.

$$\begin{aligned} \text{Kai } y = x^2, \text{ tai } dy = 2x dx \text{ ir } \int_L (2x + 3y^2)dx + (6xy - 1)dy = \\ = \int_1^2 (2x + 3x^4)dx + \int_1^2 (6x^3 - 1) \cdot 2x dx = 93. \end{aligned}$$

PIRMOJO IR ANTROJO TIPO KREIVINIŲ INTEGRALŲ SĄRYŠIS



Tarkime, kad L – glodžioji orientuota kreivė. Kampus, kuriuos kreivės liestinė $\vec{\tau}_i$, einanti per tašką $M(x_i, y_i)$, sudaro su koordinačių ašių teigiamomis pusašėmis, pažymėsime α ir β .

PIRMOJO IR ANTROJO TIPO KREIVINIŲ INTEGRALŲ SĄRYŠIS

Matome, kad $\Delta x_i \approx \Delta s_i \cos \alpha$, $\Delta y_i \approx \Delta s_i \cos \beta$.

Iš čia gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i) &\approx \\ &\approx \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i) \cos \alpha + Q(x_i, y_i) \cos \beta) \Delta s_i \end{aligned}$$

Perėję prie ribos, kai $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, gauname abiejų tipų kreivinių integralų sąryšį

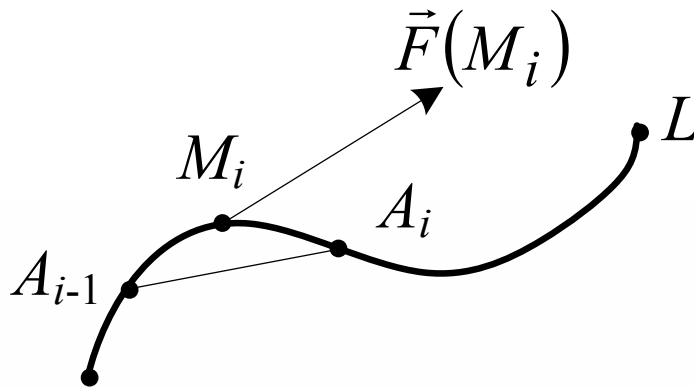
$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta) ds.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO MECHANINĖ PRASMĖ

Tarkime, kad materialus taškas, veikiamas kintamos jėgos

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

juda kreive L . Apskaičiuosime šios jėgos atliktą darbą.



Lanką L padaliname į n dalinių lankų $A_{i-1}A_i$. Kiekviename lanke pasirenkame tašką $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO MECHANINĖ PRASMĖ

Tarkime, kad kiekviena daliniame lankе jėga $\vec{F}$ yra pastovi ir lygi

$$\vec{F}_i(M_i) = \vec{F}(x_i, y_i, z_i),$$

o taškas juda ne lanku A_{i-1}, A_i , bet atkarpa $A_{i-1}A_i$.

Tada materialaus taško poslinkis lygus:

$$\Delta \vec{s}_i = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j} + \Delta z_i \cdot \vec{k}.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO MECHANINĖ PRASMĖ

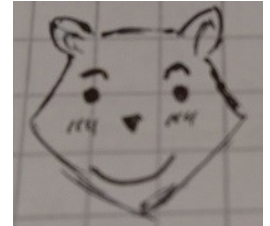
Kadangi darbas lygus jėgos ir poslinkio vektorių skaliarinei sandaugai, tai **jėgos $\vec{F}$ atliktas darbas** apytiksliai lygus:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta s_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta z_i). \end{aligned}$$

Perėję prie ribos, kai $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, gauname

$$A = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

ANTROJO TIPO KREIVINIO INTEGRALO MECHANINĖ PRASMĖ



Pavyzdys: Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j}$, perkeldama materialųjį tašką kreive $L : y = 4 - x^2$ iš taško $A(2; 0)$ į tašką $B(1; 3)$.

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}; \quad dy = -2x dx$$

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L (x - y) dx + x dy =$$

$$= \int_2^1 \left(x - (4 - x^2) \right) dx + x(-2x) dx = \frac{29}{6}$$

- Antrojo tipo kreivinio integralo sąvoka ir apskaičiavimas;
- Kintamosios jėgos (jėgų lauko) darbas.

- Dvilypio ir kreivinio integralų ryšys.
- Antrojo tipo kreivinio integralo priklausomybė nuo integravimo kelio.
- Pilnųjų diferencialų integravimas.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



1. Apskaičiuokite integralą $\int_L x^2 dx + y dy$, kreivę $L: y = x^2$ nuo taško $A(0,0)$ iki taško $B(1,1)$.
2. Apskaičiuokite integralą $\int_L xy dx + (x^2 - y^3) dy$, kreivę $L: y = x$ nuo taško $A(0,0)$ iki taško $B(1,1)$.
3. Apskaičiuokite integralą $\int_L (x - y) dx + x dy$, kai $L: y = 4 - x^2$ kreivės lankas nuo taško $A(1,3)$ iki taško $B(2,0)$ kryptimi.
4. Apskaičiuokite integralą $\int_L y dx - x dy$, kai $L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ kreivės lankas, esantis pirmajame ketvirtyje ir apeinamas teigiamąja kryptimi.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt