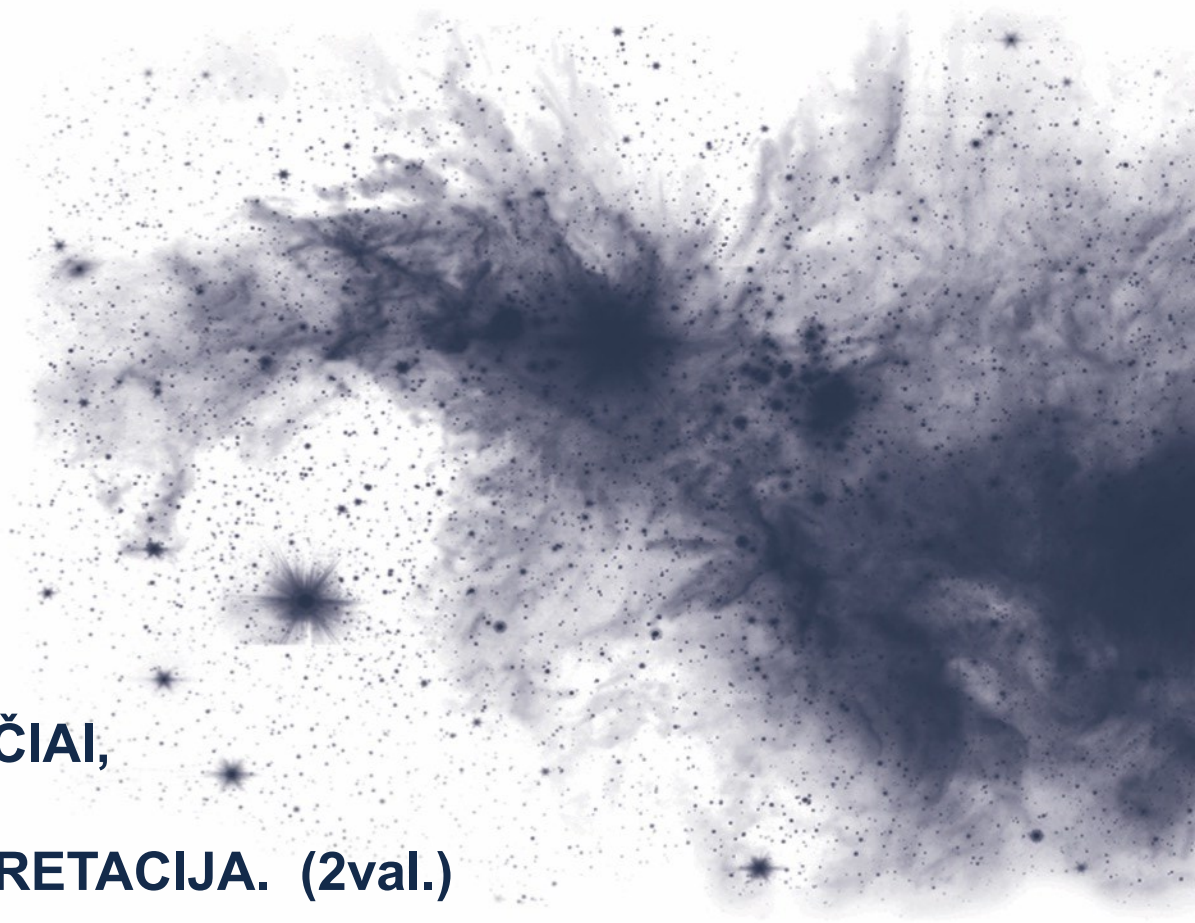


1 PASKAITA

KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI,
VEIKSMAI SU JAIS,
GEOMETRINĖ INTERPRETACIJA. (2val.)



EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Kompleksiniai skaičiai, veiksmai su jais;
- Geometrinė interpretacija.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Apibrėžimas: Kompleksiniu skaičiumi vadiname reiškini
 $z = x + iy$, čia x, y – realieji skaičiai, o i –
menamas vienetas, turįs savybę $i^2 = -1$.
 x – realioji dalis (komponentė) $x = \operatorname{Re} z$
 y – menamoji dalis (komponentė) $y = \operatorname{Im} z$

Apibrėžimas: Kompleksiniai skaičiai $z = x + iy$ ir $\bar{z} = x - iy$
yra vadinami **jungtiniais**.

Kompleksinių skaičių aibė: $C = \{x + iy \mid x, y \in R\}.$

KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

VIDEO



VEIKSMAI SU KOMPLEKSINIAIS SKAIČIAIS

Apibrėžimas: Kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ **suma (skirtumu)** vadinamas kompleksinis skaičius

$$z = x \pm iy = z_1 \pm z_2 = \\ = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Pavyzdys: $z_1 = 2 + 4i$ ir $z_2 = 3 - 2i$.

VEIKSMAI SU KOMPLEKSNIAIS SKAIČIAIS

Apibrėžimas: Kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sandauga vadinamas kompleksinis skaičius

$$\begin{aligned} z = x + iy = z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + i^2y_1y_2 = \\ &= [i^2 = -1] = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Pavyzdys: $z_1 = 2 + 4i$ ir $z_2 = 3 - 2i$.

VEIKSMAI SU KOMPLEKSNIAIS SKAIČIAIS

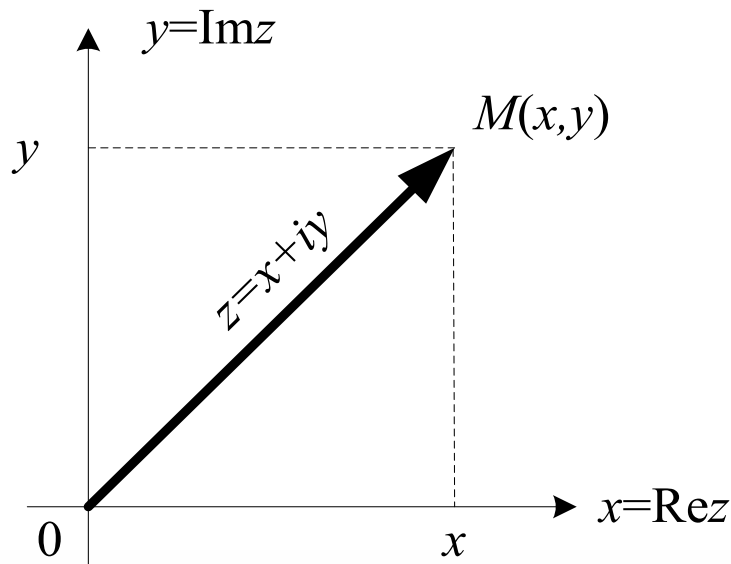
Apibrėžimas: Kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 dalmeniu vadinamas kompleksinis skaičius

$$z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}, (z_2 \neq 0), \text{ su kuriuo } z_1 = z \cdot z_2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Pavyzdys: $z_1 = 2 + 4i$ ir $z_2 = 3 - 2i$.

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VAIZDAVIMAS



Kompleksinis skaičius vaizduojamas plokštumos tašku $M(x, y)$, kurio abscisė lygi z realiajai daliai x , o ordinatė – menamajai daliai y .

Ox ašis vadinama **realiaja ašimi**, o Oy – **menamąja**, o pati plokštuma – **kompleksine plokštuma**.

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VAIZDAVIMAS

Kiekvieną plokštumos tašką atitinka vienintelis kompleksinis skaičius.

Kompleksinį skaičių galima vaizduoti ir **vektoriumi**, kurio pradžia yra koordinatų sistemos pradžioje, o galas taške $M(x, y)$.

Apibrėžimas: Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ **moduliu** $|z|$ vadinamas realus neneigiamas skaičius

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ lygus vektoriaus } (x, y) \text{ ilgiui.}$$

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VAIZDAVIMAS

Apibrėžimas: Nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ argumentu vadinamas radianais išmatuotas orientuotas kampas $\varphi = \operatorname{Arg} z$, kurį sudaro vektorius (x, y) su kompleksinės plokštumos teigiama realiąja pusaše.

Tą patį kompleksinį skaičių atitinka be galo daug argumento reikšmių, kurios viena nuo kitos skiriasi dydžiu $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Iš jų išskiriame pagrindinę argumento reikšmę

$$\varphi_0 = \arg z, \text{ tenkinančią sąlygą } 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VAIZDAVIMAS

Tada

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

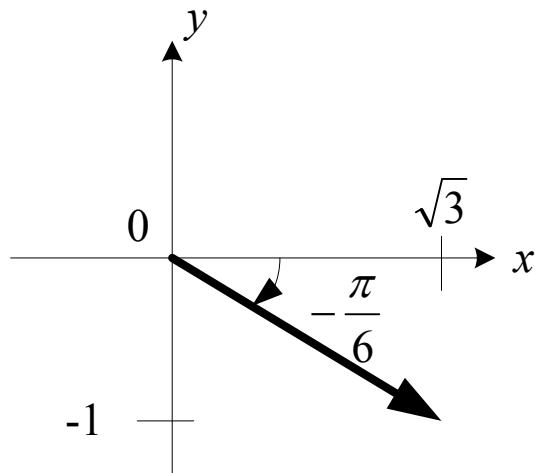
Tai

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \quad (\text{I, IV ketv.}) \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, \quad (\text{II ketv.}) \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \leq 0. \quad (\text{III ketv.}) \end{cases}$$

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VAIZDAVIMAS

Pavyzdys:

Raskime kompleksinio skaičiaus $z = \sqrt{3} - i$ argumento pagrindinę reikšmę ir pavaizduokime kompleksinėje plokštumoje.



$$x = \sqrt{3}, x > 0, \quad y = -1, y < 0 - 4 \text{ ketv.}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Savybė: } \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ TRIGONOMETRINĖ FORMA

Apibrėžimas: Kompleksinio skaičiaus z išraišką

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \cdot \sin \operatorname{Arg} z) = \\ &= r(\cos \varphi_0 + i \cdot \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

vadiname jo **trigonometrine forma**.

Pavyzdys: Užrašykite $z = 2 - 2i$ trigonometrine forma.

VEIKSMAI SU KOMPLEKSNIAIS SKAIČIAIS, IŠREIKŠTAIS TRIGONOMETRINE FORMA

Sandauga. Dauginant kompleksinius skaičius trigonometrine forma, jų modulių sudauginame, o argumentus sudedame.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Dalyba. Dalijant kompleksinius skaičius trigonometrine forma, jų modulių padalijame, o argumentus atimame:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Pvz: $z_1 = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right), z_2 = 4 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$

VEIKSMAI SU KOMPLEKSNIAIS SKAIČIAIS, IŠREIKŠTAIS TRIGONOMETRINE FORMA

Kėlimas laipsniu. Modulį keliam laipsniu n , o argumentą padauginam iš laipsnio rodiklio n .

$$z^n = r^n (\cos n\varphi_0 + i \sin n\varphi_0) - \text{Muavro formulė.}$$

Pavyzdys: $z = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right), \quad z^3 = ?$

VEIKSMAI SU KOMPLEKSNIAIS SKAIČIAIS, IŠREIKŠTAIS TRIGONOMETRINE FORMA

Šaknies traukimas. Kompleksinį skaičių w vadiname n -tojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus z , jei $w^n = z$. Žymime $w = \sqrt[n]{z}$.

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Taigi, $\sqrt[n]{z}$ turi n skirtingų reikšmių.

Pavyzdys: Rasime visas $\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$ šaknis.

RODIKLINĖ KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ FORMA

Apibrėžimas. Lygybę $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ vadiname **Oilerio formule.**

Tuomet

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

yra kompleksinio skaičiaus **rodiklinė forma.**

RODIKLINĖ KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ FORMA

Veiksmai:

1. **Daugyba:** $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

2. **Dalyba:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, z_2 \neq 0$

3. **Kėlimas laipsniu:** $z^n = r^n e^{in\varphi}$

4. **Šaknies traukimas:** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

RODIKLINĖ KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ FORMA

Pavyzdys: 1. Užrašysime skaičių $z = \sqrt{3} + i$
rodikline forma.

2. Pakelkime 4 laipsniu skaičių
 $z = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

- Kompleksiniai skaičiai;
- Veiksmai su jais;
- Geometrinė interpretacija;
- Kompleksinių skaičių trigonometrinė forma;
- Kompleksinių skaičių rodiklinė forma.

KITA PASKAITA

- Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas.
- Integravimo metodai.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt