

2 PASKAITA

**PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS.
INTEGRAVIMO METODAI. (4val.)**



EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas;
- Neapibrėžtinio integralo pagrindinės savybės.

PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Diferencialinio skaičiavimo uždavinys:

rasti funkcijos išvestinę arba diferencialą, t.y. duota $F(x)$ – diferencijuojama funkcija atkarpoje $[a, b]$, reikia rasti

$$F'(x) = f(x) \text{ arba } dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Dažnai tenka spręsti atvirkštinį uždavinį – ieškoti $F(x)$, kai žinoma šios funkcijos išvestinė $f(x)$ arba diferencialas $f(x)dx$.

PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Apibrėžimas: Funkcija $F(x)$ yra vadinama funkcijos $f(x)$ **pirmykšte funkcija atkarpoje** $[a,b]$, jeigu visuose šios atkarpos taškuose teisinga lygybė

$$F'(x) = f(x) \text{ arba } dF(x) = f(x)dx.$$

Integravimo uždavinys: rasti pirmykštę funkciją.

Analogiškai apibrėžiama ir pirmykštė funkcija intervale (a,b) arba begaliniam intervale, jei jame funkcija diferencijuojama.



PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Pavyzdys.

$$F(x) = \sin x, \text{ tai } F'(x) = \cos x = f(x).$$

Funkcijos $f(x) = \cos x$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ intervale $(-\infty; +\infty)$ yra šios:

$$F(x) = \sin x,$$

$$F(x) = \sin x + 1,$$

$$F(x) = \sin x - 5,$$

...

$$F(x) = \sin x + C, \quad C = \text{const}.$$

Visų šių funkcijų išvestinės yra $\cos x$.

PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Teorema: Jei $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ yra dvi funkcijos $f(x)$ pirmykštės funkcijos atkarpoje $[a, b]$, tai jos viena nuo kitos skiriasi tik konstanta C :

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Irodymas. $F_1'(x) = f(x)$ ir $F_2'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \underbrace{(F_1(x) - F_2(x))'}_{const} = 0, \quad \text{nes } (const)' = 0.$$

Tai $F_1(x) - F_2(x) = C.$

PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Šis atvirkštinis veiksmas išvestinės radimui negali pilnai atkurti funkcijos, nuo kurios buvo gauta išvestinė (nes $C' = 0$ ir konstantos neatkuriame). Atkurdami mes gaunam ne vieną pirmykštę, o pirmykščių funkcijų aibę $F(x) + C$, kurių išvestinė yra $f(x)$.

PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Apibrėžimas: Jeigu funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, tai reiškiny $F(x) + C$ ($C - const$) vadinamas funkcijos $f(x)$ **neapibrėžtiniu integralu**:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

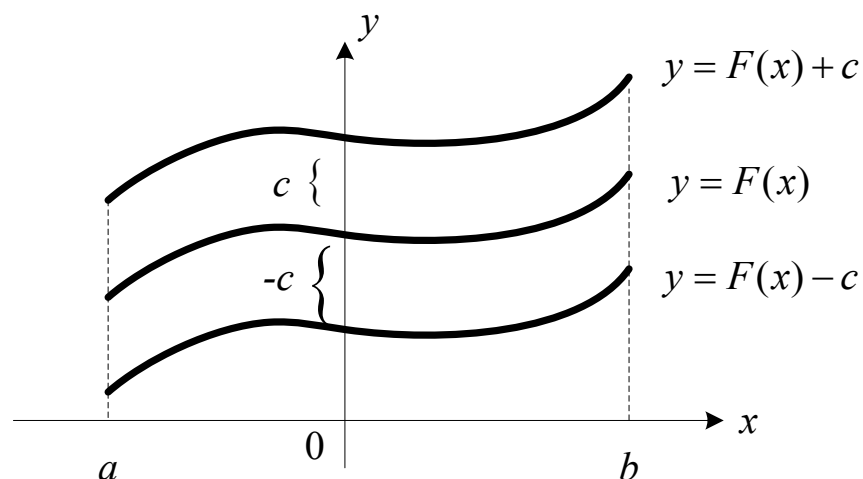
Čia $f(x)$ - pointegralinė funkcija,
 $f(x)dx$ - pointegralinis reiškiny,
 $\int$ - integralo ženklas, x - integravimo kintamasis.

Veiksmas, kuriuo randama duotosios funkcijos pirmykštė funkcija, vadinamas **integravimu**.



PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Geometriškai $\int f(x)dx$ reiškia šeimą kreivių $y = F(x) + C$, kurių kiekviena gaunama lygiagrečiai pastumiant funkcijos $y = F(x)$ grafiką Oy ašies kryptimi į viršų ar į apačią.



NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Iš neapibrėžtinio integralo apibrėžimo seka:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, nes

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Neapibrėžtinio integralo išvestinė lygi pointegralinei funkcijai.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$

Neapibrėžtinio integralo diferencialas lygus pointegraliniam reiškiniui.

3. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$



NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

1 Teorema: Pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \text{ kai } a = \text{const} \quad (a \neq 0).$$

NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

2 Teorema: Baigtinio skaičiaus funkcijų sumos (skirtumo) integralas yra lygus šių funkcijų integralų sumai (skirtumui):

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Išvada:

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx, \quad a, b = \text{const}$$

NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

3 Teorema: (apie integravimo formulių invariantiškumą)

Jeigu $\int f(x)dx = F(x) + C$ ir $u = \varphi(x)$ - funkcija, turinti tolydžią išvestinę, tai

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Irodymas:

Imkime sudėtinę funkciją $F(u) = F(\varphi(x))$.

Pirmos eilės diferencialui yra būdingas formos invariantiškumas

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

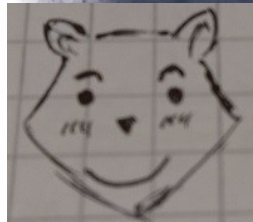


NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Tuomet

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C.$$

Išvada: visos integravimo formulės bus teisingos, jeigu vietoj kintamojo bus funkcija. Svarbu, kad kintamieji būtų tie patys.



NEAPIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Pavyzdys.

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, \quad (u \neq 0), \text{ čia } u = \varphi(x).$$

$$\int f(x+a)dx = \int f(x+a)d(x+a) = F(x+a) + C,$$

$$d(x+a) = (x+a)'dx = 1 \cdot dx$$

INTEGRAVIMO METODAI:

- ✓ Tiesioginio integravimo metodas
- ✓ Kintamojo keitimo metodas
- ✓ Integravimas dalimis

TIESIOGINIO INTEGRAVIMO METODAS

Integravimas, naudojantis pagrindinėmis neapibrėžtinio integralo savybėmis ir pagrindinėmis formulėmis, vadinamas

TIESIOGINIU INTEGRAVIMU.

Kad galėtume taikyti integravimo formulių invariantiškumo savybę, pointegralinį reiškinių reikia pertvarkyti taip, kad integruojant galėtume taikyti kurią nors integravimo formulę.

TIESIOGINIS INTEGRAVIMAS

Pavyzdžiai:

$$1. \int \sqrt[3]{x^7} dx$$

$$2. \int (2x - 1) dx$$

$$3. \int (3x - 4)^2 dx$$

$$4. \int \frac{dx}{1 + 9x^2}$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2(8x + 3)}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x^2}}$$

$$7. \int \frac{dx}{(3 + \operatorname{tg}^2(5x)) \cos^2(5x)}$$

KINTAMOJO KEITIMO METODAS

Tarkime, kad $\int f(x)dx$ negalima apskaičiuoti taikant integravimo savybes ir formules. Vienas iš metodų yra keisti kintamąjį, po kurio integralas susiveda į mums pažįstamą.

Seną kintamąjį x pakeičiame funkcija nuo naujo kintamojo t : $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ - tolydi diferencijuojama funkcija, o $x = \varphi(t)$ turi atvirkštinę funkciją $t = \psi(x)$, be to $\varphi'(t) \neq 0$.

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

KINTAMOJO KEITIMO METODAS

Pavyzdys:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}};$$

KINTAMOJO KEITIMO METODAS

Jei pointegraliniame reiškinyje yra:

- 1) dauginamasis $\sqrt{a^2 - x^2}$, tai tikslinga įvesti trigonometrinius keitinius $x = a \sin t$ arba $x = a \cos t$;
- 2) $\sqrt{a^2 + x^2}$, tai įvedame keitinius $x = a \operatorname{tg} t$ arba $x = a \operatorname{ctg} t$;
- 3) $\sqrt{x^2 - a^2}$, tai įvedame keitinius $x = \frac{a}{\cos t}$ arba $x = \frac{a}{\sin t}$.

Pavyzdžiai:

$$1. \int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2} dx \quad 2. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$$

INTEGRATIVAS DALIMIS

$$\int u dv = uv - \int v du$$



INTEGRAVIMAS DALIMIS

Turim dvi funkcijas $u = u(x)$, $v = v(x)$, turinčias tolydžias išvestines. Tuomet

$$d(uv) = (u'v + uv')dx = \underbrace{u'dx}_du v + u \underbrace{v'dx}_dv = vdu + u dv$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$u dv = d(uv) - vdu$$

$$\int u dv = \underbrace{\int d(uv)}_{uv} - \int v du = uv - \int v du.$$

Norint šią formulę pritaikyti, reikia pointegralinį reiškinių suskaidyti į du dauginamuosius u ir dv .

INTEGRAVIMAS DALIMIS

$$1) \int P(x) \ln x dx, \int P(x) \arcsin x dx, \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \dots$$

$P(x)$ – daugianaris

$$u = \ln x, u = \arcsin x, u = \operatorname{arctg} x, \dots$$

$$2) \int P(x) e^{ax} dx, \int P(x) \cos(ax) dx, \int P(x) \sin(ax) dx,$$

$P(x)$ – daugianaris, a – realus skaičius

$$u = P(x)$$

INTEGRAVIMAS DALIMIS

$$3) \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx, \int e^{ax} \sin(bx) dx, \int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx,$$

a, b – realūs skaičiai.

$$u = e^{ax}, u = \sin(\ln x), u = \cos(\ln x).$$

Pažymėję bet kurį šios grupės integralą raide I ir dukart pritaikę integravimo dalimis formulę, gausime pirmojo laipsnio lygtį integralo I atžvilgiu. Iš šios lygties rasime I .

INTEGRATIVAS DALIMIS(papildomai)

LIATE, ILATE, and DETAIL rules

We have

L = logarithmic

I = inverse trigonometric

A = algebraic

T = trigonometric

E = exponential

LIATE and **ILATE** are supposed to suggest the order in which you are to choose the “u”. In **DETAIL** (LIATE backwards with a D in front, right?) we have the order in which to choose our “dv”.

<https://mathnow.wordpress.com/2009/10/14/liate-ilate-and-detail/>

INTEGRAVIMAS DALIMIS

Pavyzdžiai:

$$1. \int x \cos(3x) dx$$

$$3. \int \operatorname{arctg} x dx$$

$$2. \int x^2 \ln x dx$$

$$4. \int e^{3x} \cos 2x dx$$

KĄ IŠMOKOM

- Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas;
- Integravimo metodai.

KITA PASKAITA

- Integralinė suma ir apibrėžtinis integralas;
- Apibrėžtinio integralo savybės;
- Geometrinė interpretacija;
- Integralas su kintamu viršutiniu režiu;
- Niutono – Leibnico formulė.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

- $\int \operatorname{tg}(x) dx$
- $\int \frac{1+x+(\operatorname{arctg}(3x))^3}{1+9x^2} dx$
- $\int \frac{e^{2x} \operatorname{arctg}(e^{2x})}{1+e^{4x}} dx$
- $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) dx;$

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt