

3 PASKAITA

A large, ethereal image of a cosmic dust cloud or nebula occupies the right half of the slide. It features a dense, dark central core with wispy, translucent edges, speckled with numerous small, bright white stars. The overall color palette is a range of greys and blues, creating a sense of depth and vastness.

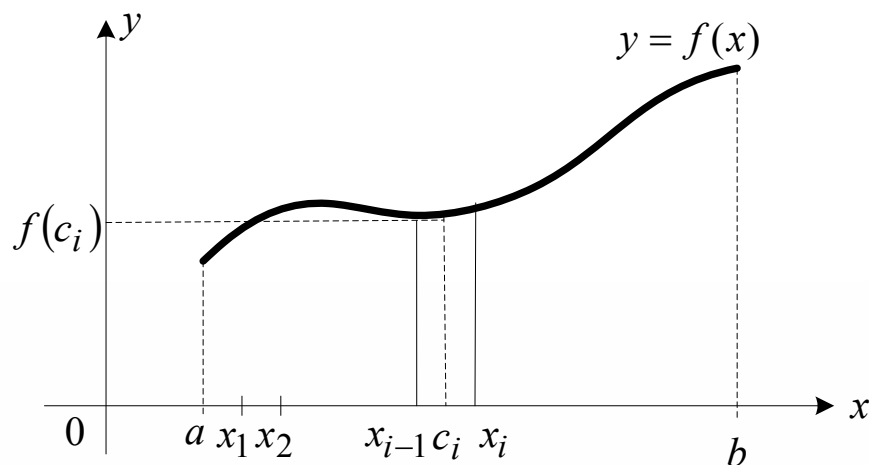
**INTEGRALINĖ SUMA IR
APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS (Rymano).
APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS.
GEOMETRINĖ INTEPRETACIJA.
INTEGRALAS SU KINTAMU VIRŠUTINIU RĖŽIU.
NIUTONO – LEIBNICO FORMULĖ. (2 val.)**

EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- **Apibrėžtinio integralo sąvoka;**
- **Apibrėžtinio integralo savybės** (mokėti pakomentuoti savybių geometrinę prasmę, pvz:
 - ✓ didesnės funkcijos ir integralas didesnis - parodyti geometriškai.
 - ✓ arba įvertinimo savybės geometrinę prasmę);
- **Kreivinės trapecijos plotas.**
- **Integralas su kintamu viršutiniu rėžiu** (be įrodymo, mokėti taikyti).
- **Niutono – Leibnico formulė** (su įrodymu, mokėti taikyti)

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Duota funkcija $y = f(x)$, tolydi ir apibrėžta intervale $[a, b]$.



1. Atkarpą $[a, b]$ padalijame į n dalių (nebūtinai lygių)

$$a < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n.$$

2. Kiekvienoje dalyje parenkame po tašką c_i :

$$c_1 \in [a, x_1], c_2 \in [x_1, x_2], \dots, c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$



APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

3. Suskaičiuojame funkcijos reikšmes pasirinktuose taškuose

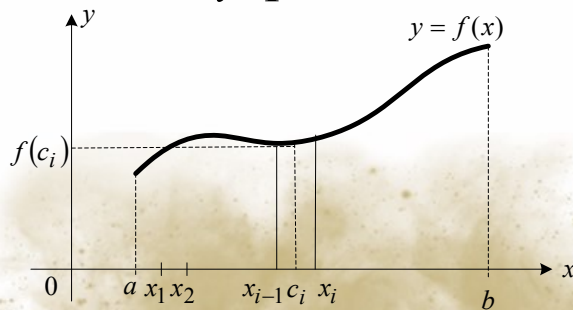
$$f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_i), \dots, f(c_n).$$

4. Sukonstruojame sandaugas (intervalo ilgį padauginame iš funkcijos reikšmių pasirinktuose taškuose)

$$f(c_1) \cdot \Delta x_1, f(c_2) \cdot \Delta x_2, \dots, f(c_i) \cdot \Delta x_i, \dots, \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, (i = \overline{1, n}).$$

5. Gautas sandaugas susumuojame

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n.$$



APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

6. Gautoji suma priklausys nuo intervalo padalinimo. Tam, kad nepriklausytų, pareikalaukime $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i] \rightarrow 0, \forall i$, arba jeigu $\lambda = \max[x_{i-1}, x_i], i \in \overline{1, n}$ ir jeigu $\lambda \rightarrow 0$, tai gauta suma nebepriklausys nuo padalinių kiekio ir gausime

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ši suma vadinama **integraline (Rymano) suma**.



APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Apibrėžimas. Baigtinė integralinės sumos riba, kai $\lambda \rightarrow 0$, vadinama funkcijos $f(x)$ **apibrėžtiniu integralu** atkarpoje $[a, b]$.

Žymime $\int_a^b f(x)dx$. Taigi, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Skaičiai a ir b vadinami **apatiniu ir viršutiniu integravimo rėžiais** ($f(x)$ apibrėžimo srities galai).



APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAMPRATA

Funkcija vadinama **integruojama Rymano prasme**, jeigu atkarpoje $[a, b]$ ji yra tolydi (nes tik tolydi funkcija turės sukonstruotos integralinės sumos ribą).

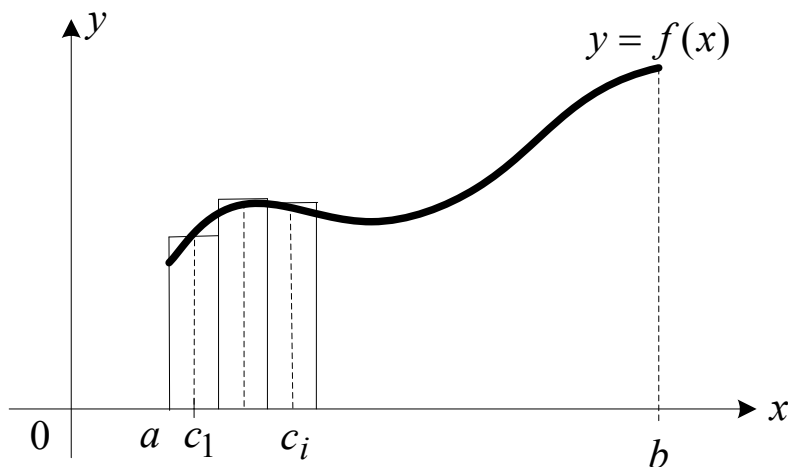
(Jei funkcijos $f(x)$ integralinė suma turi baigtinę ribą, tai funkciją vadiname **integruojama Rymano prasme** atkarpoje $[a, b]$ arba integruojama atkarpoje $[a, b]$.)

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



Ką reiškia $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ geometriškai?

Pasekime integralinės sumos sudarymo žingsniais. Pradinė sąlyga buvo: duota funkcija $f(x)$ - tolydi atkarpoje $[a, b]$ - kas tai yra geometriškai?



Matematika 2 (P130B002)

Apibrėžimas:

Figūra, apribota funkcijos $y = f(x)$ grafiku ir tiesėmis $x = a$ ir $x = b$, ir x ašies intervalu vadinama **kreivine trapecija**.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



Taigi, turime kreivinę trapeciją.

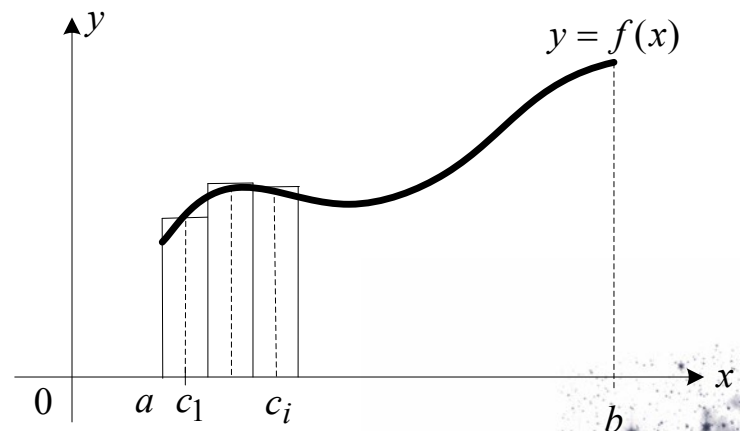
1) Dalijame atkarpą $[a, b]$ į intervalus;

2) Juose parenkame c_i ;

3) Suskaičiuojame $f(c_i)$.

4) Kas bus $f(c_i) \cdot \Delta x_i$? – Tai stačiakampių, kurių kraštinės eina per dalinimo taškus, o aukštinės ilgis $f(c_i)$, plotai.

5) Sumuojame visas sandaugas – geometriškai gauname laiptuotos figūros plotą.



APIBRĖŽTINIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



6) Pareikalaujame, kad $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$. Jeigu didžiausias intervalas artės į nulį, tai tų plotelių bus labai daug ir laiptuotos figūros plotas artės prie kreivinės trapecijos ploto:

$$\left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right| = S_{kreiv.trap.}$$

Reikia pastebėti, kad $y = f(x)$ buvo teigiama ($y > 0$). Jeigu funkcijos grafikas būtų žemiau x ašies, atlikus procedūrą $f(c_i) < 0$ visa suma būtų su „–“, ženklu. Tačiau gautoji sumos riba vis tiek reikštų plotą, o „–“, rodytų tik figūros padėtį x ašies atžvilgiu.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



Sakykime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ - integruojamos atkarpoje $[a, b]$ funkcijos.

Tuomet teisingi šie teiginiai:

1) Tiesiškumo savybė:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx,$$

α, β - bet kokie realieji skaičiai.

2)
$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



3) Kai $a < b$, tai $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

4) Adityvumo savybė. Kad ir kokie būtų skaičiai a, b, c teisinga lygybė

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

jei tik visi trys integralai egzistuoja.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



5) Pastovaus ženklų savybė.

• Jei $f(x) \geq 0$ atkarpoje $[a, b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

• Jei $f(x) \leq 0$ atkarpoje $[a, b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

6) Palyginimo savybė.

Jei $f(x) \geq g(x)$ atkarpoje $[a, b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



7) Apibrėžtinio integralo įvertis.

Tarkime, kad $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ ir $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$. Tada

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



8) Vidutinės reikšmės teorema.

Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a, b]$, tai egzistuoja tos atkarpos taškas c , kuriame

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ vadinama vidutine funkcijos } f(x)$$

reikšme atkarpoje $[a, b]$.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS



Pavyzdžiai:

1. Įvertinti integralą: $\int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx.$

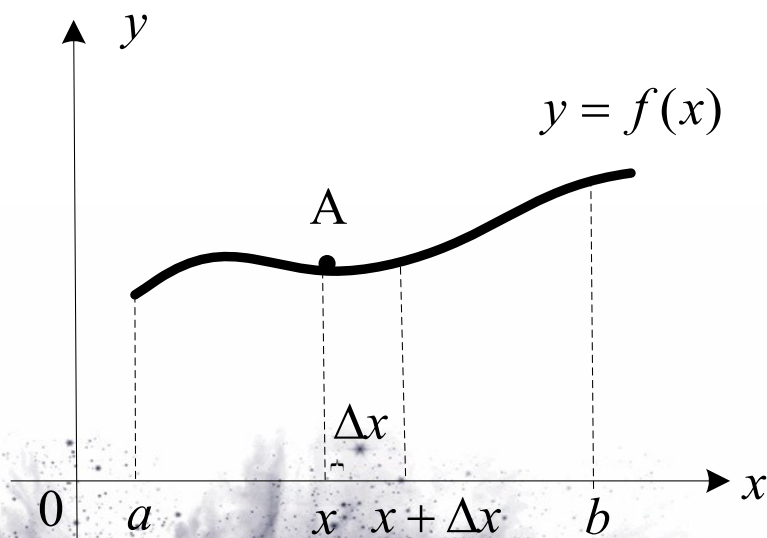
2. Apskaičiuoti funkcijos $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ vidutinę reikšmę atkarpoje $[0, 2\pi]$.

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU KINTAMU VIRŠUTINIU RĖŽIU



Jeigu funkcija $f(x)$ yra integruojama atkarpoje $[a, b]$, o $x \in [a, b]$, tai ji bus integruojama ir atkarpoje $[a, x]$. Nagrinėsime $\int_a^x f(t)dt$.

Ką jis reiškia geometriškai?



Tai kreivinės trapecijos, turinčios kintančią kraštinę Δx , plotas. Plotas bus kintamas ir priklausys nuo x padėties. Todėl galima užrašyti

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$$

Matematika 2 (P130B002)

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU KINTAMU VIRŠUTINIU RĖŽIU



Teorema. Jei funkcija $f(x)$ – tolydi atkarpoje $[a, b]$, $\Phi'(x) = f(x)$ kiekviename atkarpos taške x .

Iš čia seka, kad $\Phi(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė atkarpoje $[a, b]$.

Išvada: Taigi, kiekviena tolydi $[a, b]$ funkcija $f(x)$ turi pirmykštę funkciją

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU KINTAMU VIRŠUTINIU RĖŽIU



Pavyzdys. Kam lygi integralų

$$1) \int_1^x (t^3 + 1) dt, \quad 2) \int_x^3 \frac{dt}{4 + t^2}$$

išvestinė kintamojo x atžvilgiu?

NIUTONO-LEIBNICO FORMULĖ



Teorema. Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a, b]$ ir $F(x)$ – kuri nors jos pirmykštė funkcija šioje atkarpoje, tai

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

NIUTONO-LEIBNICO FORMULĖ



Irodymas. Tolydi atkarpoje $[a, b]$ funkcija $f(x)$ turi pirmąją,

lygią
$$\int_a^x f(t)dt.$$

Kadangi pagal sąlygą $F(x)$ irgi yra funkcijos $f(x)$ pirmąją, tai jos turi skirtis tik konstanta, todėl

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

NIUTONO-LEIBNICO FORMULĖ



Jeigu $x = a$, gautume $\int\limits_0^a f(t)dt = F(a) + C$,

$$0 = F(a) + C, \quad -F(a) = C.$$

Taigi, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Jeigu $x = b$, gautume $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Ši formulė vadinama **Niutono – Leibnico formule**.

NIUTONO-LEIBNICO FORMULĖ



Skirtumą $F(b) - F(a)$ įprasta žymėti $F(x)|_a^b$. Tada

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Pavyzdys.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx$$

KĄ IŠMOKOM

- Integralinė suma ir apibrėžtinis integralas (Rymano);
- Apibrėžtinio integralo savybės;
- Geometrinė interpretacija;
- Integralas su kintamu viršutiniu režiu;
- Niutono – leibnico formulė.

KITA PASKAITA

- Apibrėžtinio integralo skaičiavimo metodai:
 - ✓ Kintamųjų keitimo metodas;
 - ✓ Integravimo dalimis metodas;
 - ✓ Simetriniai rėžiai;
 - ✓ Integralai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.
- Geometrinis apibrėžtinio integralo taikymai:
 - ✓ Figūros plotas;
 - ✓ Kreivės lanko ilgis;
 - ✓ Sukinio tūris.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Jei funkcijos $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ atkarpoje $[0; 2]$ mažiausia reikšmė $m = 2$, o didžiausia reikšmė $M = 2\sqrt{2}$, tai teisinga nelygybė:

- a) $2 \leq \int_0^2 \sqrt{4 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2};$
- b) $4 \leq \int_0^2 \sqrt{4 + x^2} dx \leq 4\sqrt{2};$
- c) $0 \leq \int_0^2 \sqrt{4 + x^2} dx \leq 2;$
- d) Teisingo atsakymo nėra.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI



Apskaičiuokite funkcijų vidutines reikšmes nurodytose atkarpose:

a) $f(x) = \cos^7 x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad x \in [2; 6].$

c) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}}, \quad x \in [0; 4].$

d) $f(x) = x \sin x, \quad x \in [0; \pi].$

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt