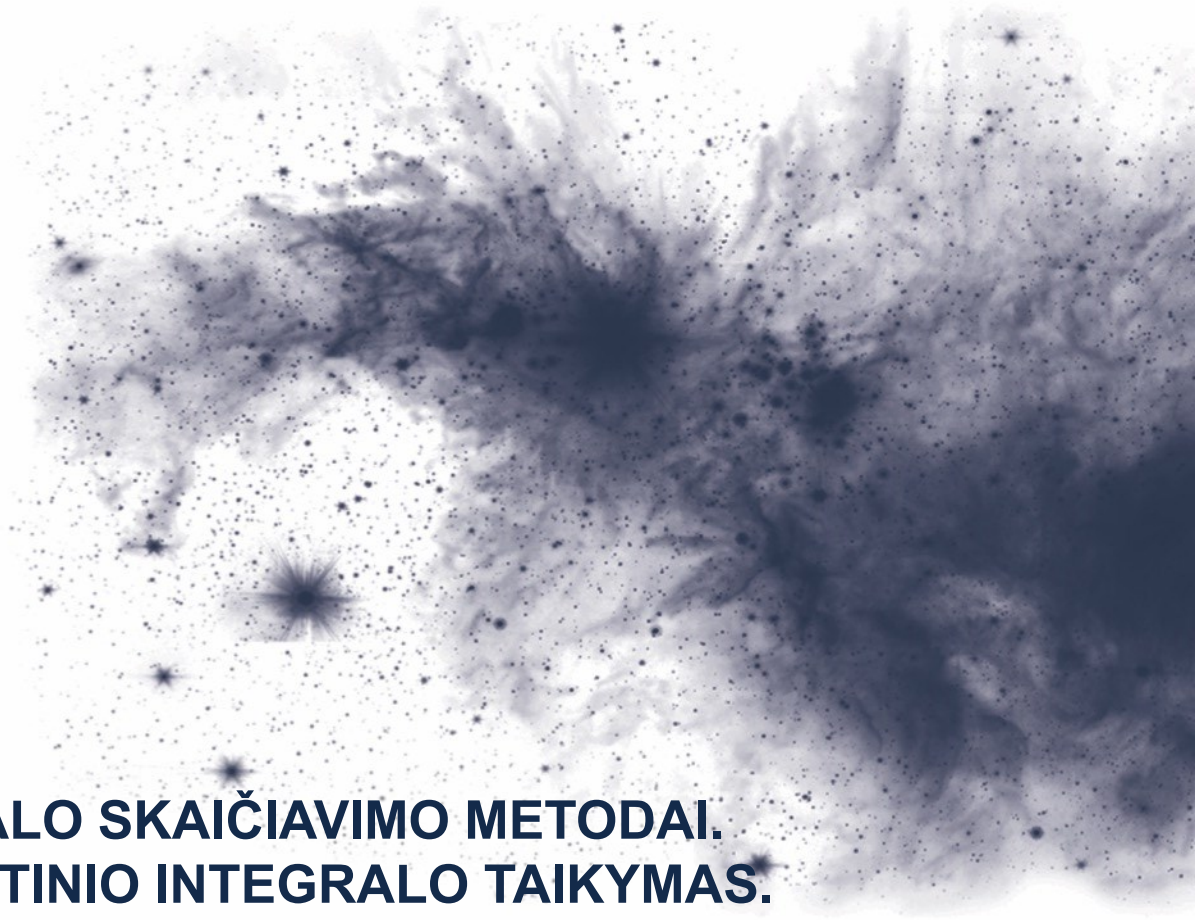


4 PASKAITA



**APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SKAIČIAVIMO METODAI.
GEOMETRINIS APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAS.
(3 val.)**

KINTAMŲJŲ KEITIMO METODAS

Teorema. Tarkime, kad integrale $\int_a^b f(x)dx$ kintamasis x

pakeistas pagal formulę $x = \varphi(t)$. Jeigu:

- 1) $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a, b]$,
- 2) $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t)$ tolydžios atkarpoje $[\alpha; \beta]$
- 3) $\varphi(t)$ reikšmių aibė yra atkarpa $[a, b]$, be to,
 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tai

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

KINTAMŲJŲ KEITIMO METODAS

Pavyzdžiai:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}} = \frac{5}{3} - 2\ln 2 ;$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}} = 2 - \ln 2 ;$$

INTEGRAVIMO DALIMIS METODAS



Teorema. Sakykime, kad $u(x)$ ir $v(x)$ – diferencijuojamos atkarpoje $[a, b]$ funkcijos. Tuomet

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Pavyzdys.

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = 1$$

INTEGRALAI

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

Šie integralai apskaičiuojami panaudojant formules:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{nelyginis}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n - \text{lyginis}. \end{cases}$$

Pavyzdžiai: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx;$ $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$

SIMETRINIAI RĖŽIAI

Teorema. Tarkime, kad $f(x)$ tolydi atkarpoje $[-a, a]$, ($a > 0$) funkcija.
Tuomet

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{kai } f(x) - \text{lyginė funkcija,} \\ 0, & \text{kai } f(x) - \text{nelyginė funkcija.} \end{cases}$$

SIMETRINIAI RĖŽIAI

Pavyzdžiai

Nelyginė funkcija -
$$\int_{-1}^1 x dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ f(-x) = -x \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Lyginė funkcija -
$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}$$

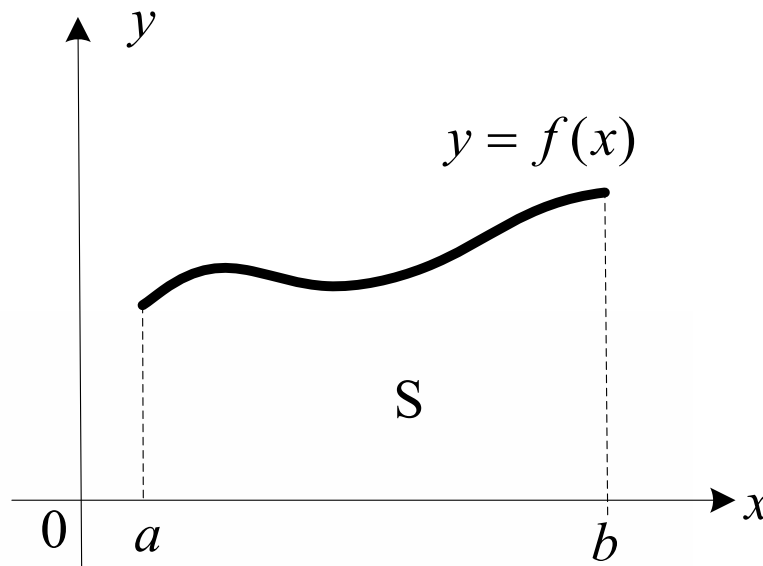
GEOMETRINIS APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAS

1. **Figūros ploto** skaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje ir kai kreivė duota parametrinėmis lygtimis;
2. **Kreivės lanko ilgio** skaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje ir kai kreivė duota parametrinėmis lygtimis;
3. **Sukinio tūrio** skaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje;



FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

1. Žinome, kad kreivinės trapecijos plotas yra lygus apibrėžtiniam integralui.



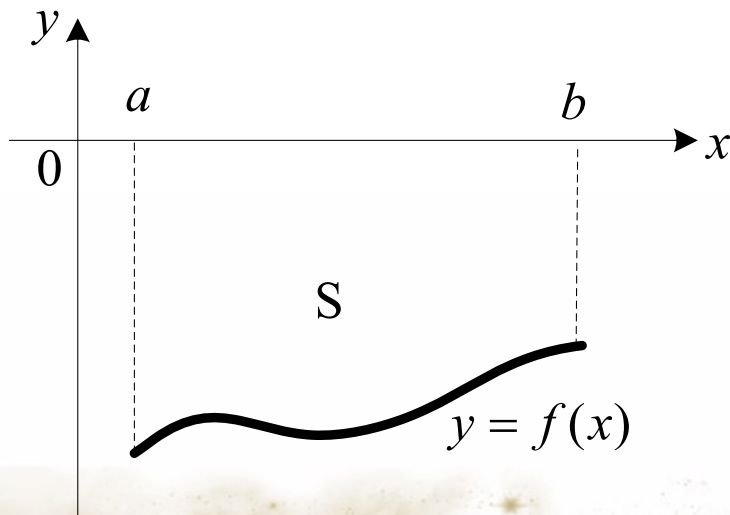
$$y = f(x) \geq 0,$$
$$x = a, x = b$$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Jeigu $f(x) < 0$, tai grafikas bus po x ašimi ir plotą gausime su „–“ ženklu.

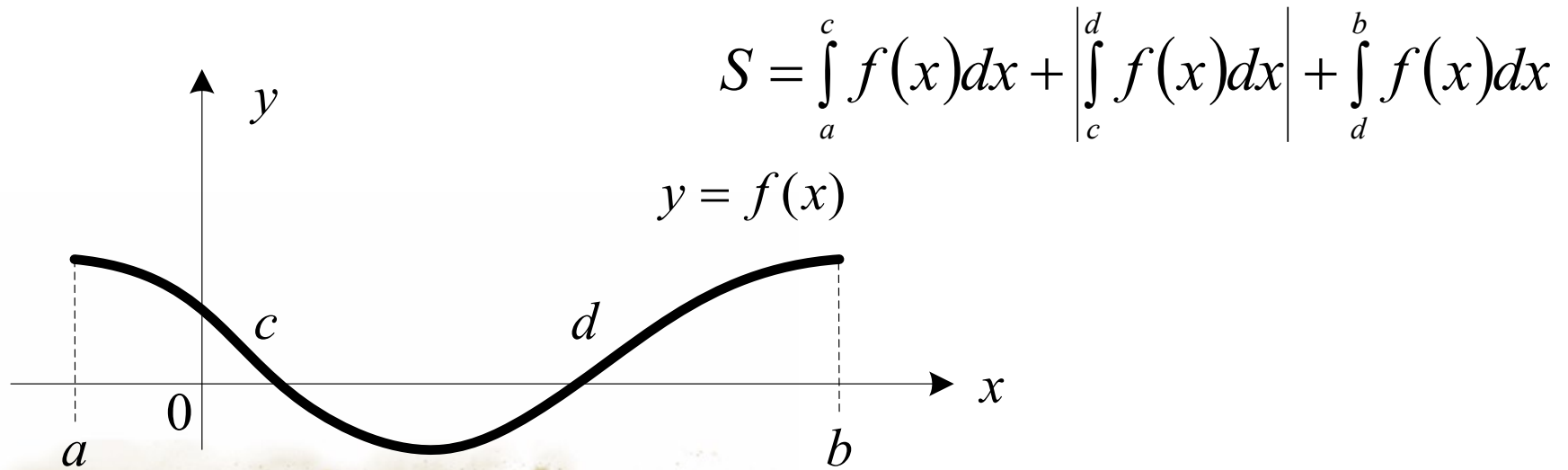
Jeigu skaičiuosime integralą – jis bus neigiamas, tačiau skaičiuojant plotą, imame integralo absoliutinę reikšmę:



$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

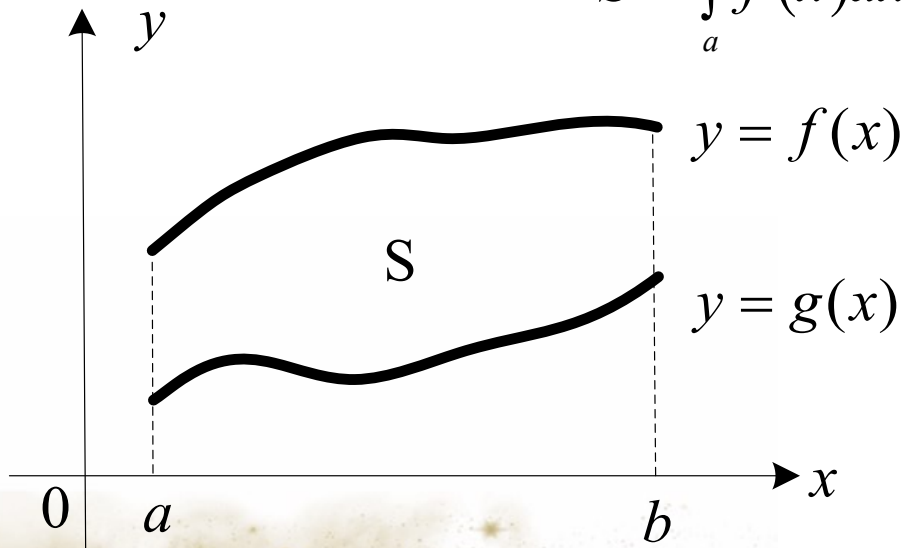
2. Jeigu funkcijos $f(x)$ grafikas kelis kartus kerta x ašį, tai dalis ploto yra virš x ašies, dalis – žemiau jos. Tokiu atveju skaičiuojame kiekvienos dalies plotą atskirai ir sudedame juos.



FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

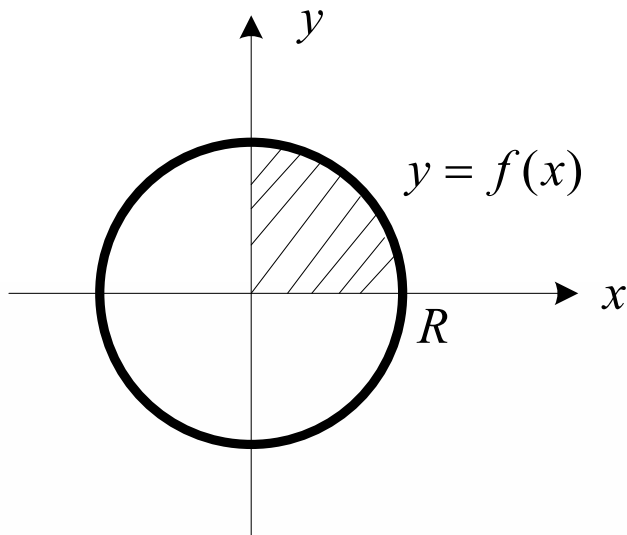
3. Jeigu figūrą riboja dviejų funkcijų grafikai $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$), tai

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

4. Jeigu figūra yra simetriška, ieškome vienos dalies ploto ir dauginame iš dalių kiekio:



$$S = 4 \int_0^R f(x) dx$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Pavyzdys.

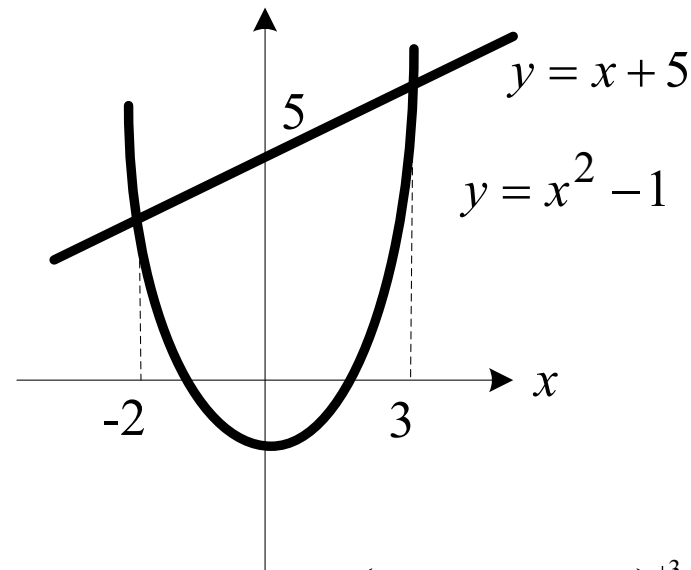
Apskaičiuokite figūros, apribotos kreivėmis $y - x^2 + 1 = 0$, $x - y + 5 = 0$ plotą.

$$y = x^2 - 1,$$
$$y = x + 5$$

Jų susikirtimo taškai:

$$x^2 - 1 = x + 5$$

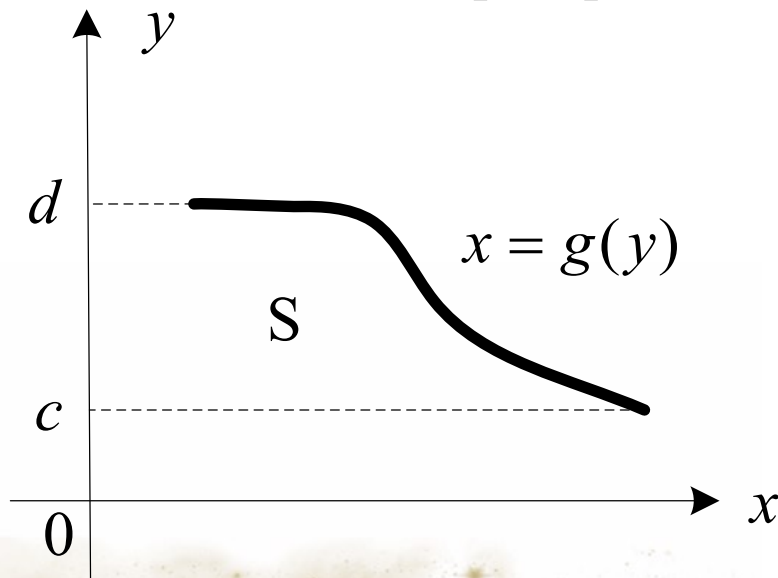
$$x_1 = -2, x_2 = 3$$



$$S = \int_{-2}^3 (x + 5 - (x^2 - 1)) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 6x \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{125}{6}$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

5. Jeigu $y = f(x)$ yra sudėtinga išraiška, galima išreikšti $x = g(y)$ tuomet integralo kintamasis bus y ir integravimo intervalas bus $[c, d]$ (y ašyje).



$$S = \int_c^d g(y) dy$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS, KAI KREIVĖ DUOTA PARAMETRINĖMIS LYGTIMIS

6. Jeigu kreivė duota parametrinėmis lygtimis $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$
tai kreivinės trapecijos, apribotos šios kreivės, Ox ašies ir tiesių $x = a, x = b$, plotas lygus

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

rėžiai t_1 ir t_2 randami iš lygčių

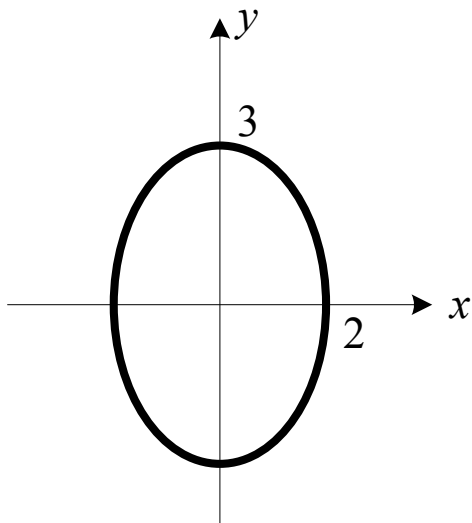
$$a = x(t_1), b = x(t_2) \quad (y(t) \geq 0, t \in [t_1, t_2]).$$

FIGŪROS PLOTO SKAIČIAVIMAS, KAI KREIVĖ DUOTA PARAMETRINĖMIS LYGTIMIS

Pavyzdys. Apskaičiuokite figūros, apribotos kreive $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ plotą.

Elipsės parametrinės lygtys yra

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases} \quad x \in [0, 2], y \in [0, 3] - \text{I ketvirtis.}$$



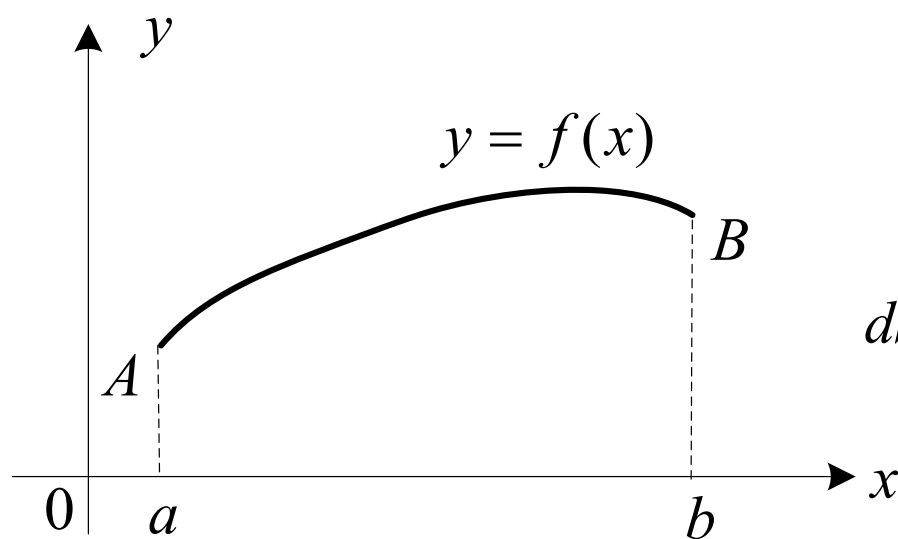
$$x = 2, \quad t = \arccos \frac{x}{2} = \arccos 1 = 0$$

$$x = 0, \quad t = \arccos \frac{x}{2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin t \cdot (-2 \sin t) dt = -24 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24 \cdot \frac{(2-1)!!}{2!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi$$

KREIVĖS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Duota: kreivė $y = f(x)$, tolydi atkarpoje $[a, b]$, $f'(x)$ - taip pat tolydi. Rasti: jos ilgį $(AB) = L$.



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b dS,$$

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

dS – kreivės lanko ilgio diferencialas.

KREIVĖS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Pavyzdys.

Apskaičiuoti kreivės $y = 2\sqrt{x^3}$, $0 \leq x \leq 11$, lanko ilgį.

$$y' = (2\sqrt{x^3})' = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+9x}.$$

Tuomet

$$L = \int_0^{11} \sqrt{1+9x} dx = \frac{1}{9} \frac{(1+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{11} = \frac{2}{27} \left(\sqrt{100^3} - \sqrt{1^3} \right) = 74.$$

KREIVĖS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS, KAI KREIVĖ YRA DUOTA PARAMETRINĖMIS LYGTIMIS

Tarkime, kreivės lygtys yra tokios:
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

$x(t)$ ir $y(t)$ - tolydžios atkarpoje $[t_1, t_2]$, turinčios tolydžias išvestines.

Kai kreivės lanko lygtis buvo $y = f(x)$, tai
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

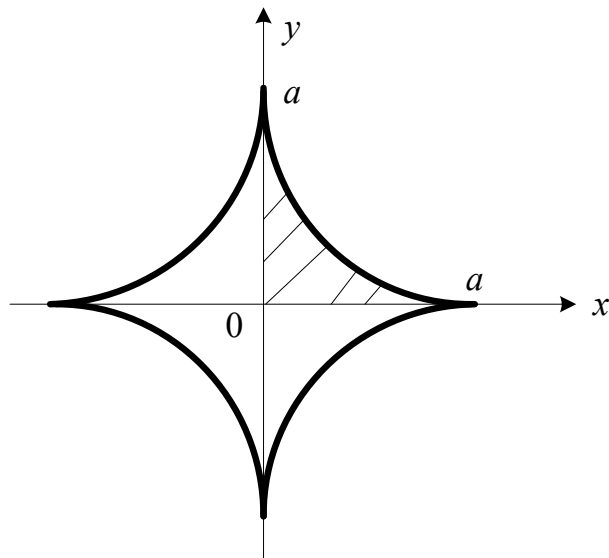
Norint pereiti prie kitokios y išraiškos, turime pakeisti kintamąjį

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad dx = x'_t dt, \quad a = x(t_1), b = x(t_2),$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)^2} \cdot x'_t dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

KREIVĖS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS, KAI KREIVĖ YRA DUOTA PARAMETRINĖMIS LYGTIMIS

Pavyzdys. Apskaičiuoti astroidės $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ lanko ilgį.



$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

$$x'_t = 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t),$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t$$

KREIVĒS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS, KAI KREIVĒ YRA DUOTA PARAMETRINĒMIS LYGTIMIS

Figūra simetriška, tai imsime I ketvirtį: $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lanko ilgį apskaičiuosite tik I ketvirtyje ir gautą rezultatą padauginsime iš 4.

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = 12a \frac{\sin^2 t}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

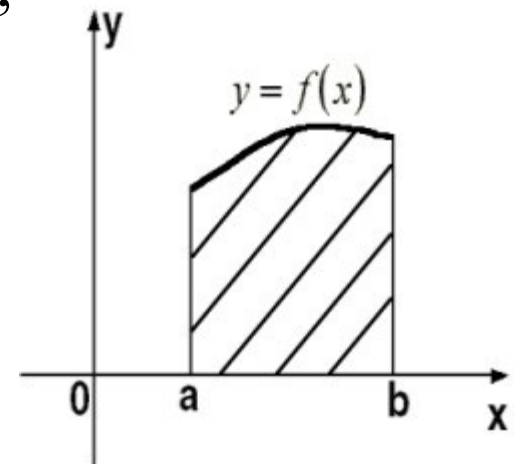
SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

1. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės $y = f(x)$ ir tiesių $y = 0, x = a, x = b$, sukama apie ašį Ox , tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

2. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės $y = f(x)$ ir tiesių $y = 0, x = a, x = b$, sukama apie ašį Oy , tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$$



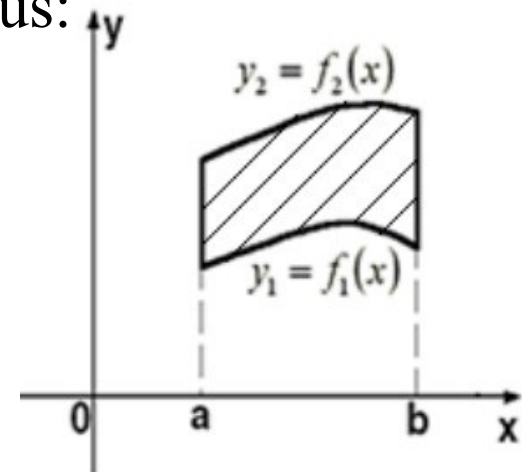
SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

3. Jei figūra, apribota kreivių $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) ir tiesių $x = a$, $x = b$, sukama apie ašį Ox , tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

4. Jei figūra, apribota kreivių $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) ir tiesių $x = a$, $x = b$, sukama apie ašį Oy , tai gauto sukinio tūris lygus:

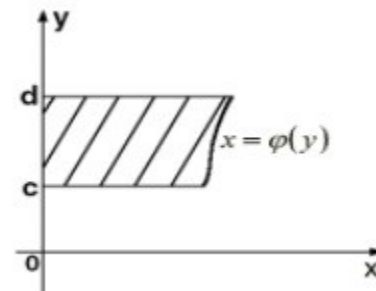
$$V_y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$



SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

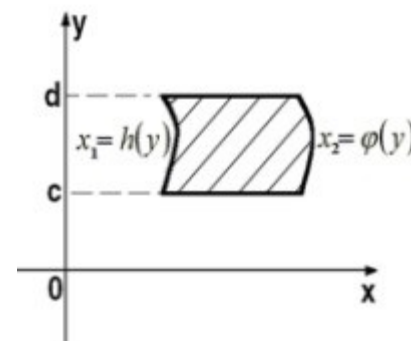
5. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės $x = \varphi(y)$ ir tiesių $x = 0, y = c, y = d$, sukama apie ašį Oy , tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$



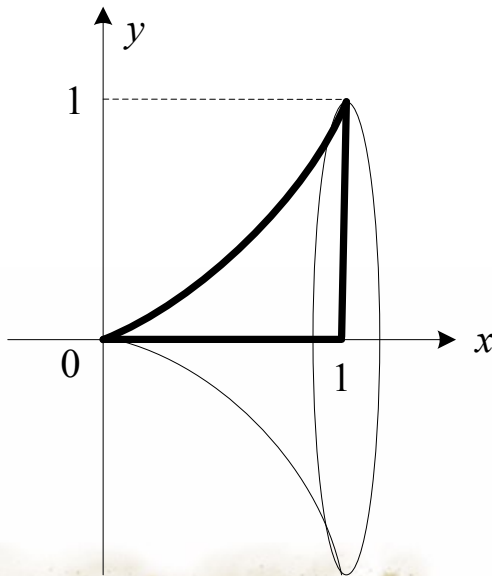
6. Jei figūra, apribota kreivių $x_1 = \varphi_1(y), x_2 = \varphi_2(y)$ ($0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) ir tiesių $y = c, y = d$, sukama apie ašį Oy , tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy$$



SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Pavyzdys. Apskaičiuokite tūrį sukinio, gauto kreivės $y = \sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 1$ apribotą figūrą sukant apie Ox , apie Oy ašį.

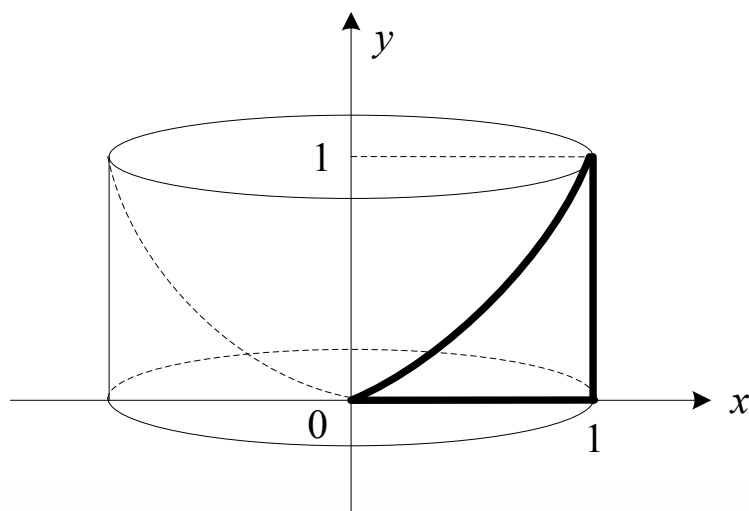


sukant apie Ox :

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x^3} \right)^2 dx = \pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE



sukant apie Oy ašį:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^3} dx = 2\pi \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{4\pi}{7}$$

KĄ IŠMOKOM

- Apibrėžtinio integralo skaičiavimo metodai:
 - ✓ Kintamųjų keitimo metodas;
 - ✓ Integravimo dalimis metodas;
 - ✓ Simetriniai režiai;
 - ✓ Integralai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.
- Geometrinis apibrėžtinio integralo taikymai:
 - ✓ Figūros plotas;
 - ✓ Kreivės lanko ilgis;
 - ✓ Sukinio tūris.

KITA PASKAITA

- Apibrėžtinis integralas su begaliniais integravimo rėžiais;
- Neapibrėžtųjų funkcijų netiesioginiai integralai.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt