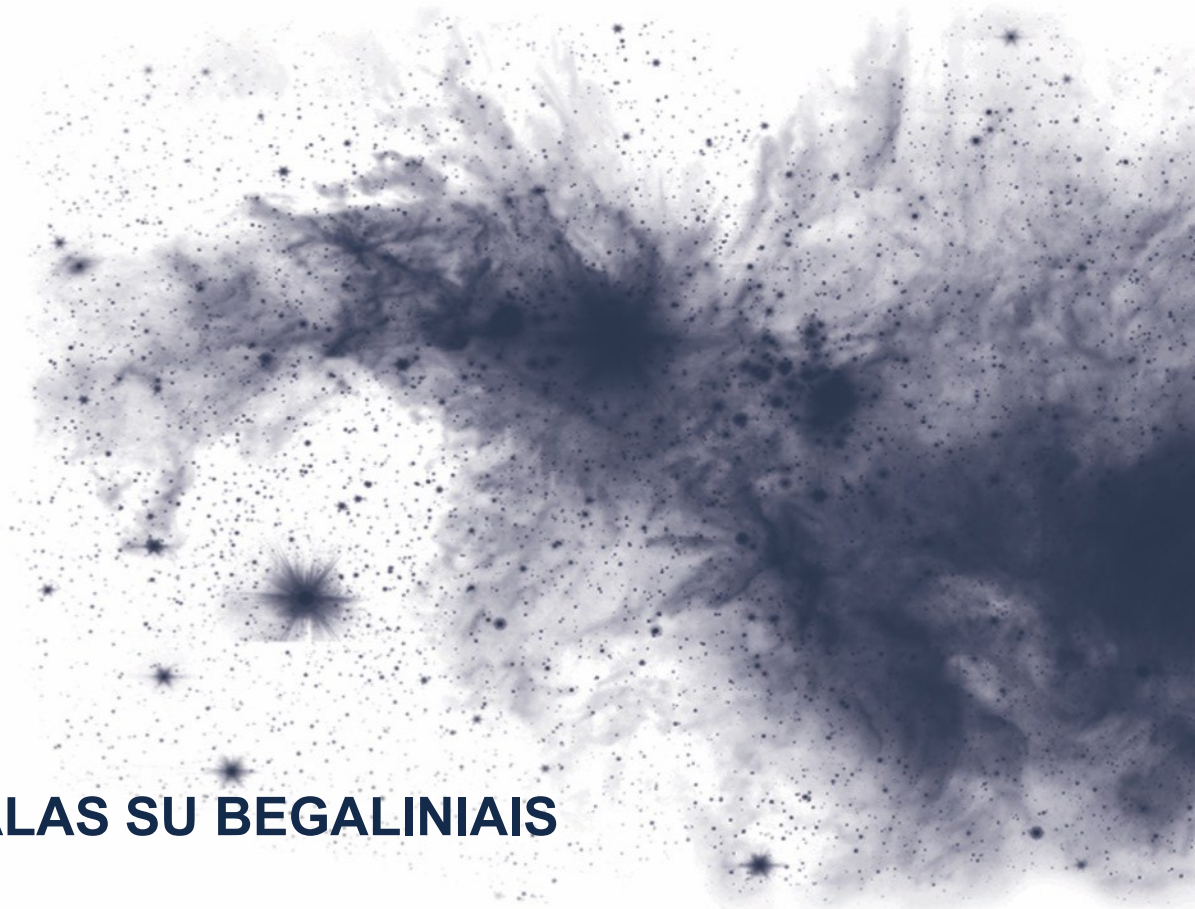


5 PASKAITA

**APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS
INTEGRAVIMO RĖŽIAIS.
NEAPRĖŽTŲJŲ FUNKCIJŲ NETIESIOGINIAI INTEGRALAI. (2 val.)**



EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Netiesioginių integralų su begaliniais integravimo rėžiais sąvoka;
- Jų konvergavimo bei divergavimo požymiai (be įrodymo).

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS

Kalbėdami apie $\int_a^b f(x)dx$ reikalavome, kad $f(x)$ būtų:

- tolydi intervale $[a, b]$;
- a ir b – baigtiniai.

Dabar nagrinėsime atvejus, kai bent viena iš šių sąlygų yra nepatenkinta, t.y.:

- a ir b – begaliniai;
- $f(x)$ – turi trūkį intervale $[a, b]$.

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS

Tarkime $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi visuose intervalo $[a, +\infty)$ taškuose.

Tuomet ji integruojama bet kurioje atkarpoje $[a, b]$, $b > a$.

Vadinasi, integralas $\int_a^b f(x)dx$ turi prasmę. Nagrinėsime šio integralo ribą, kai $b \rightarrow +\infty$.

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS



Apibrėžimas: Jeigu egzistuoja $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ (baigtinė), tai ji vadinama funkcijos $f(x)$ **netiesioginiu integralu su viršutiniu begaliniu rėžiu** $[a, +\infty)$ ir žymima

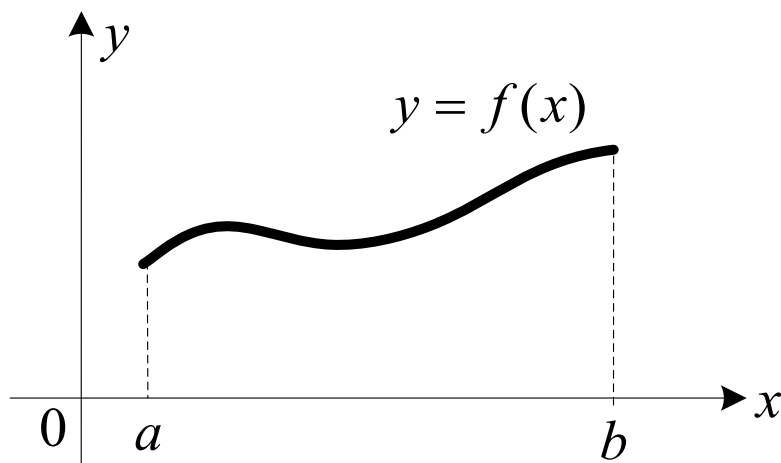
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Jeigu riba egzistuoja, tai sakome, kad netiesioginis integralas **konverguoja**, jei ne (t.y. begalinė riba) – **diverguoja**.

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS



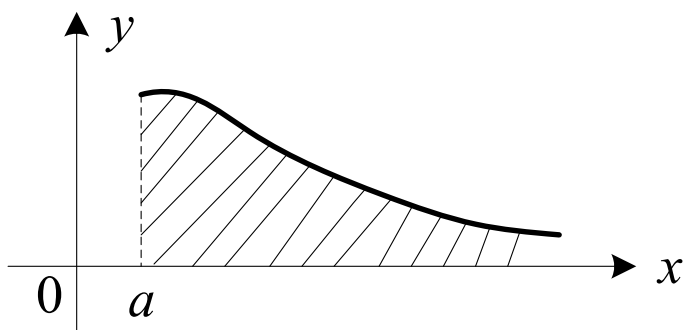
Ką netiesioginis integralas reiškia **geometriškai**?



Jeigu $f(x) \geq 0$, tai $\int_a^b f(x)dx$
reiškia kreivinės trapecijos
plotą.

Kai $b \rightarrow +\infty$, kreivinės trapecijos plotas didės ir $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ reikš
begalinės kreivinės trapecijos plotą. Tačiau šis plotas gali būti
baigtinis ir begalinis.

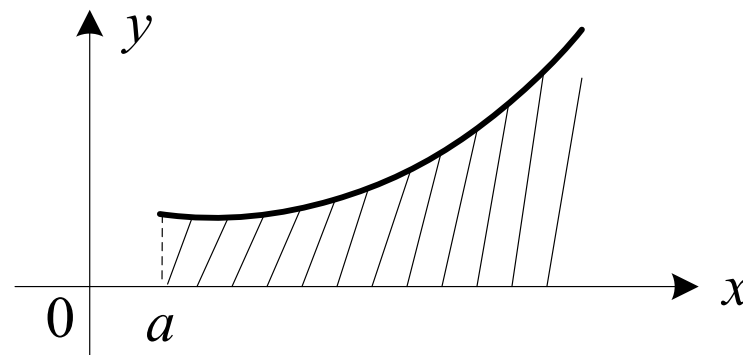
APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS



$$b \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = A$$

Integralas konverguoja.



$$b \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \infty$$

Integralas diverguoja.

APIBRĒŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRĀVIMO RĒŽIAIS

Analogiškai apibrēžiamas atvejis, kai $a \rightarrow -\infty$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx - \text{netiesioginis integralas su} \\ \text{apatiniu begaliniu rēžiu.}$$

Gali ir abu rēžiai būti begaliniai:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx \\ - \text{netiesioginis integralas su dviem begaliniais rēžiais.}$$

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS

Pavyzdys.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg 0 - \arctg a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 0 = \\&= - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \\&= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

Integralas konverguoja.

Matematika 2 (P130B002)

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU BEGALINIAIS INTEGRAVIMO RĖŽIAIS

Netiesioginį integralą galima apibrėžti taip:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

Jeigu egzistuoja pirmąsios funkcijos reikšmė begalybėje, tai ir integralas konverguoja.

Netiesioginio integralo skaičiavimui taikome:

- tiesioginio integravimo metodą,
- integravimo dalimis metodą,
- kintamųjų keitimo metodą.

NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

Dažnai praktikoje nebūtina žinoti tikslios integralo reikšmės, pakanka nustatyti ar jis konverguoja, ar diverguoja. Tą nustatyti padės konvergavimo požymiai.

1 Teorema (Koši kriterijus): Jeigu $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ konverguoja, tai konverguoja

$$\text{ir } \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Ši teorema tinka bet kokiai $f(x)$, turinčiai ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes.



NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

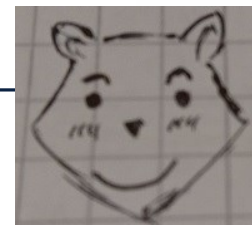
2 Teorema (Palyginimo požymis):

1) Jeigu $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ir $\forall x \int_a^{+\infty} g(x)dx$ – konverguoja, tai

konverguos ir mažesnis $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Jeigu $\forall x \ 0 \leq f(x) \leq g(x)$ ir $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – diverguoja, tai ir

didesnis diverguos, t.y. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverguos.



NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

Apibrėžimas: Integralas $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ vadinamas **absoliučiai konverguojančiu**, jei konverguoja integralas $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.



NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

Jeigu žinotume su kokia funkcija galima palyginti tiriamąją funkciją, galėtume naudoti palyginimo požymius.

Dažnai palyginimui naudojama $\frac{1}{x^\alpha} : \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$.



Tarkime $\alpha \neq 1$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^{+\infty} = \left. \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right|_a^{+\infty}.$$

NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

1) $\alpha > 1$, tada $\alpha - 1 > 0$:

$$\left. \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right|_a^{+\infty} = \frac{1}{\underbrace{(1-\alpha)(+\infty)^{\alpha-1}}_0} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} = A$$

– konverguoja.

NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

2) $\alpha < 1$, tada $\alpha - 1 < 0$:

$$\left. \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right|_a^{+\infty} = \frac{1}{(1-\alpha)(+\infty)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} = +\infty$$

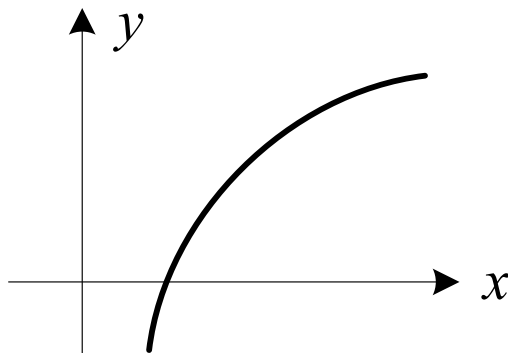
– diverguoja, nes $\frac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha} = \begin{cases} \alpha-1 < 0 \\ 1-\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow x^{+\infty} \Rightarrow +\infty.$

NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

3) $\alpha = 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln a = +\infty$$

– diverguoja.



Išvada: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{konverguoja, kai } \alpha > 1, \\ \text{diverguoja, kai } \alpha \leq 1. \end{cases}$



NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

Pavyzdys. Ištirti konvergavimą: $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.



Palyginimui naudosime $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in [e, +\infty)$,

nes $x \geq e$, $\ln x \geq 1$.

$\alpha = \frac{1}{3} < 1$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ – diverguoja, tai ir didesnis $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ diverguos.

NETIESIOGINIŲ INTEGRALŲ SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS KONVERGAVIMO POŽYMAI

3 Teorema (Ribinis palyginimo požymis): Tarkime, kad intervale $[a, +\infty)$ apibrėžtos dvi teigiamos funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$.

Jeigu egzistuoja baigtinė riba $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, tai

netiesioginiai integralai $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ir $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ kartu

konverguoja arba diverguoja.

Pastaba: kalbant apie integralų konvergavimą kartu, k gali būti $=0$.

NEAPRĖŽTŲJŲ FUNKCIJŲ (TRŪKIŲ FUNKCIJŲ) NETIESIOGINIAI INTEGRALAI

SAVARANKIŠKAI



KĄ IŠMOKOM

- Netiesioginių integralų su begaliniais integravimo rėžiais sąvoka;
- Jų konvergavimo bei divergavimo požymiai (be įrodymo).

KITA PASKAITA

- Dvilypis integralas dekartu koordinatėse;
- Dvilypis integralas polinėse koordinatėse.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt