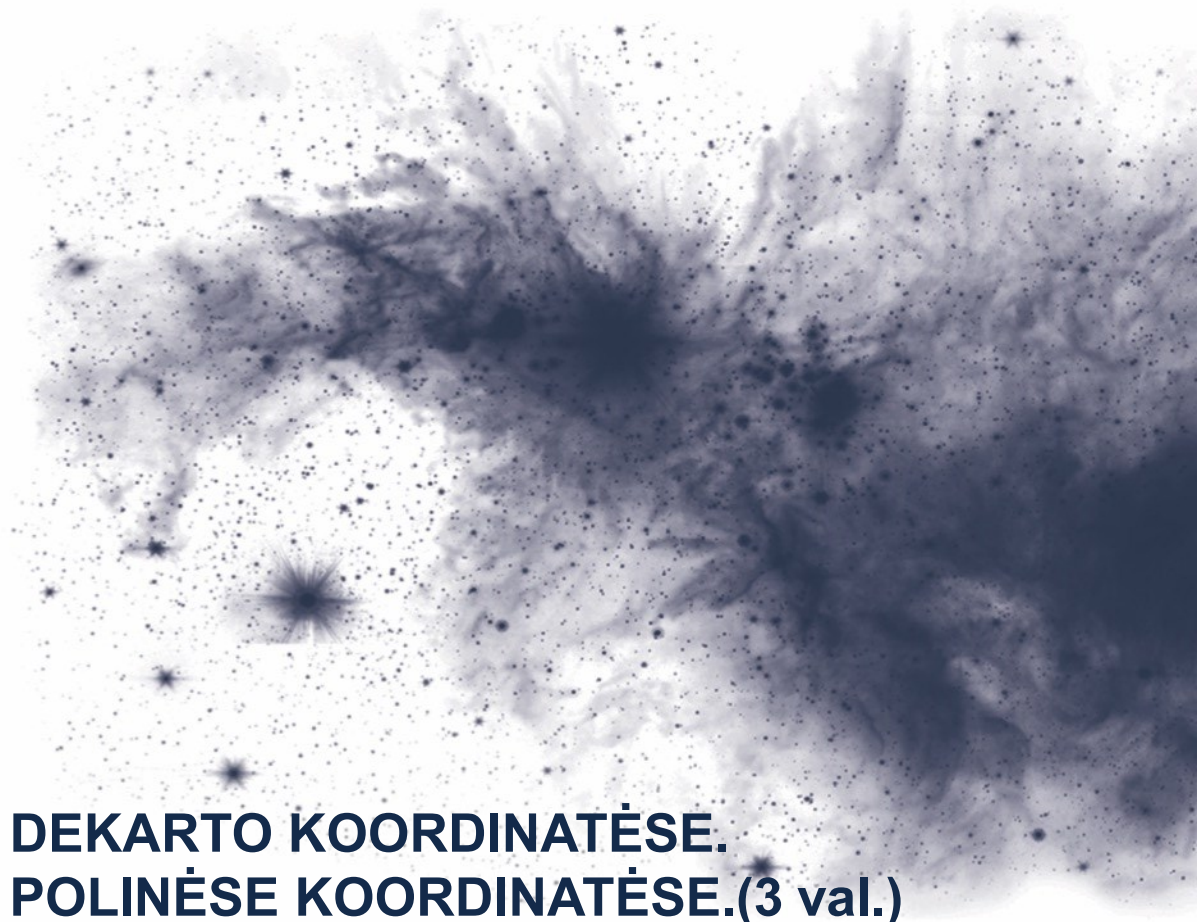


6 PASKAITA



DVILYPIS INTEGRALAS DEKARTO KOORDINATĖSE.
DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE.(3 val.)

EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

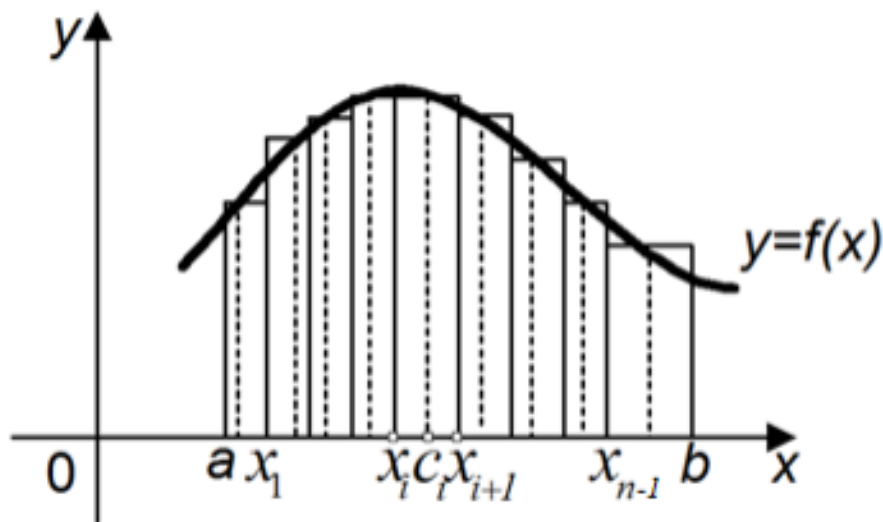
- **Dvimatė integralinė suma ir sąvoka;**
- **Dvilypio integralo savybės;**
- **Dvilypio integralo geometrinė prasmė;**
- **Dvilypio integralo apskaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje;**
- **Dvilypio integralo apskaičiavimas polinėje koordinačių sistemoje.**

DVILYPIO INTEGRALO SAMPRATA

Žinome, kad vieno kintamojo funkcijos apibrėžtinis integralas yra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i, \quad \lambda = \max \Delta x_i,$$

čia integravimo sritimi yra $[a, b]$, $x \in [a, b]$ – vienmatė sritis.



DVILYPIO INTEGRALO SAMPRATA

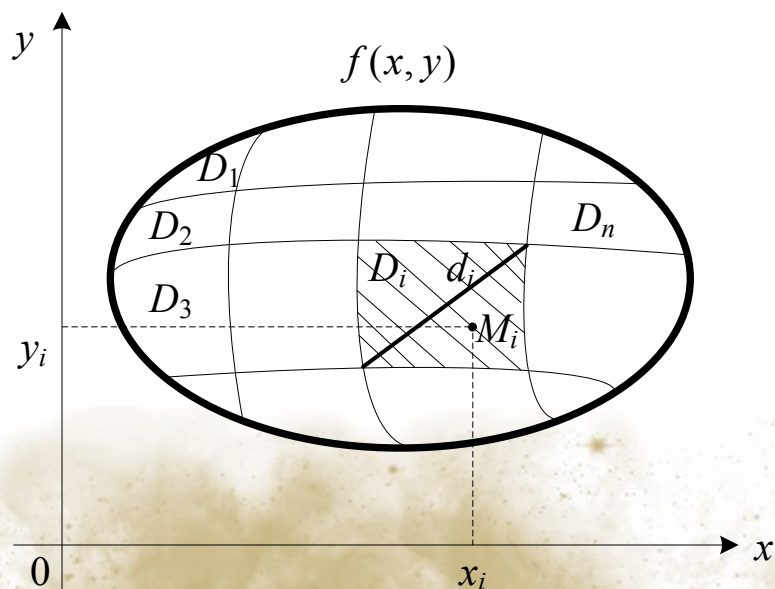


Integralo sampratą galime apibendrinti tam atvejui, kai integravimo sritis yra dvimatė, esanti plokštumoje xOy (D). Srities D kontūrą sudaro baigtinis skaičius tolydžių kreivių, kurių kiekviena išreiškiama lygtimi $y = f(x)$ ar $x = g(y)$.

Tuomet minėta sritis vadinama **kvadruojama** (turinti plotą).

Kita srities D sąlyga – jos aprėžtumas (ji nėra begalinė).

Duota f-ja $z = f(x, y)$, kuri yra tolydi ir apibrėžta uždaroje, aprėžtoje kvadruojamoje srityje D .



ALGORITMAS:

1. padaliname sritį D į n dalių $D_1, D_2, \dots, D_n$, kurių plotai yra atitinkamai $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$;
2. kiekvienoje iš dalių pasirenkame po tašką $M_i(x_i, y_i)$ ir apskaičiuojame f -jos $z = f(x, y)$ reikšmes pasirinktuose taškuose, t.y. $f(M_i) = f(x_i, y_i)$, $(i = \overline{1, n})$.

Gausime n funkcijos reiškinių;

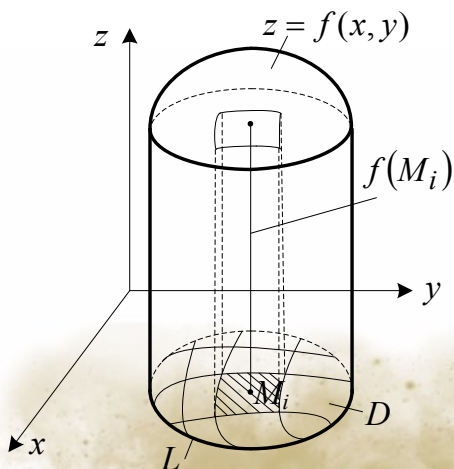
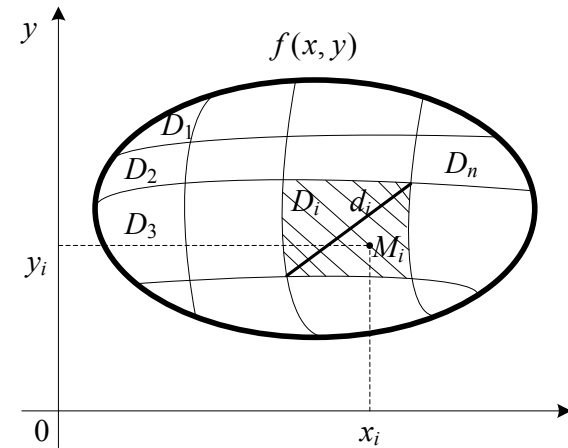
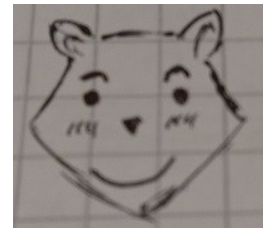
3. gautas funkcijos reikšmes, suskaičiuotas taškuose $f(M_i)$ padauginame iš atitinkamos srities ploto ΔS_i .

Gauname n sandaugų $f(M_i) \cdot \Delta S_i$ $(i = \overline{1, n})$;

4. sudėkime visas gautas sandaugas:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i.$$

Gautoji suma yra vadinama dviejų kintamųjų f -jos $f(x, y)$ **Rymano dvimate integraline suma**.



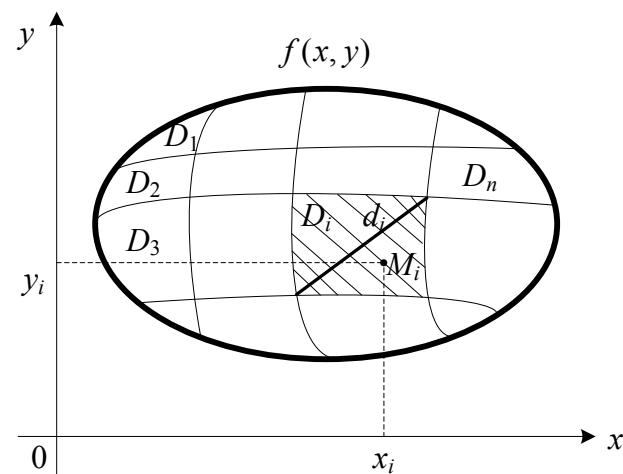
DVILYPIO INTEGRALO SAMPRATA



Tam, kad suma nepriklausytų nuo padalinimo būdo ir taškų vietos pasirinkimo, pareikalausime, kad padalinimas būtų toks tankus, kad sričių D_i plotai ΔS_i artėtų į nulį. Taip atsitiks, kai sričių skersmenys d_i artės į nulį.

Kai $\Delta S_i \rightarrow 0$, sritis D_i bus panaši į stačiakampį, kurio kraštinės Δx_i ir Δy_i .

Pažymėję $\lambda = \max\{d_i\}$, d_i – srities D_i skersmuo, ir apskaičiavę ribą, kai $\lambda \rightarrow 0$, pasieksime, kad σ nepriklausytų nuo jos padalinimo ir taškų M_i pasirinkimo.



DVILYPIO INTEGRALO SAMPRATA



Apibrėžimas: Rymano integralinės sumos baigtinė riba, kai $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), vadinama funkcijos $f(x, y)$ **dvilypiu integralu** aprėžtoje srityje D .

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i = \\ &= \iint_D f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

DVILYPIO INTEGRALO SAMPRATA



Sąlygos, kad dvilypis integralas egzistuotų:

- 1) $f(x, y)$ – integruojama (tolydi, turinti išvestinę);
- 2) sritis D – aprėžta, apribota tolydžiomis kreivėmis, kurių lygtys $y = f(x)$ arba $x = g(y)$;
- 3) $f(x, y)$ – aprėžta. Jeigu būtų neaprėžta, tai kurioje nors iš dalių ji būtų neaprėžta, tai ir sandauga $f \cdot \Delta S$ būtų begalinė, tuo pačiu ir riba būtų $= \infty$. O reikalaujame, kad egzistuotų baigtinė riba.

DVILYPIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ

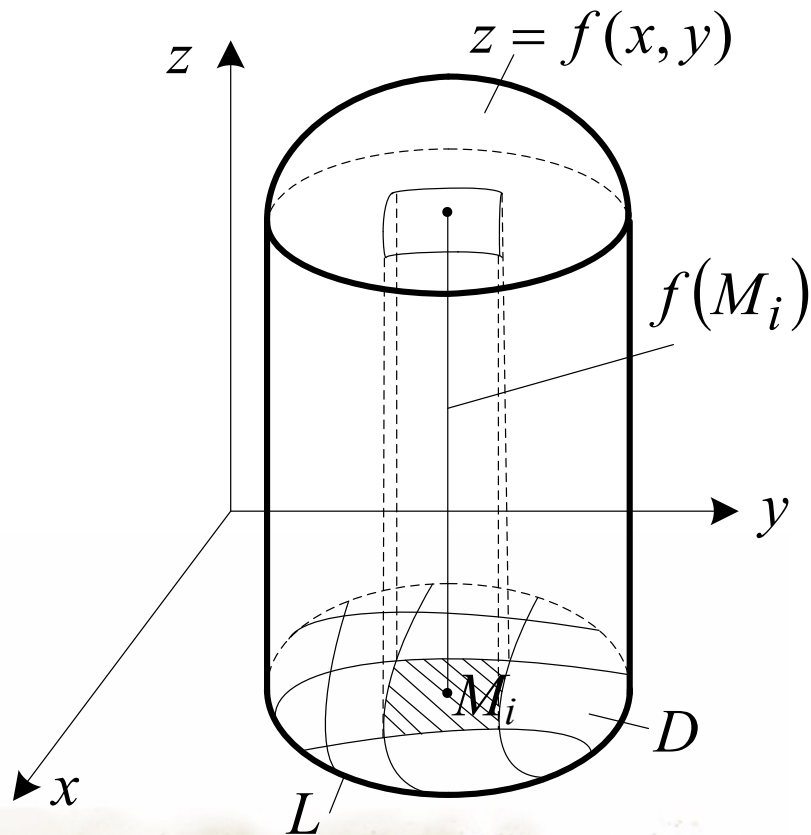
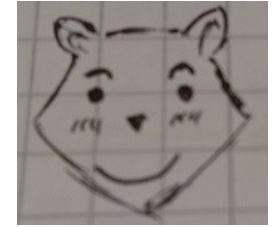


Tegul $f(x, y)$:

- aprėžta,
- tolydi funkcija,
- neneigiama apibrėžta srities D taškuose (uždaros srities).

Funkcija $z = f(x, y)$ **geometriškai reiškia** paviršių. Jeigu $f(x, y)$ apibrėžta srities D taškuose, tai paviršiaus pagrindu yra sritis D , sudaryta iš (x, y) taškų.

DVILYPIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



Gausime cilindroidą,
kurio:

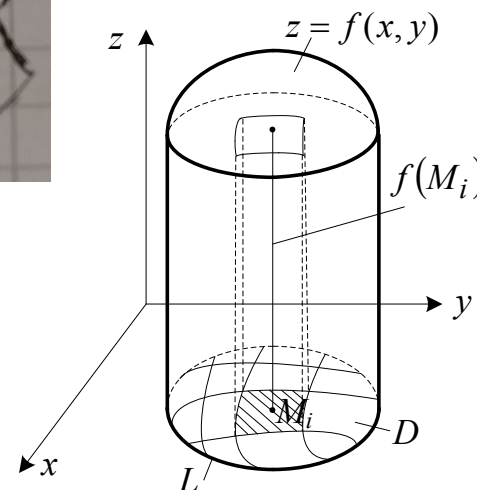
- pagrindas – sritis D ,
- viršuje paviršius $z = f(x, y)$,
- sudaromos, lygiagrečios Oz ašiai.

DVILYPIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



Integralinė suma

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$



reiškia elementariųjų cilindrų, kurių pagrindas ΔS_i ir aukštinė $f(x_i, y_i)$, tūrių sumą.

Viso cilindro tūris $V \approx \sigma$. Ši lygybė bus tuo tikslesnė, kuo srities D_i plotelis ΔS_i bus mažesnis, tuo jis bus artimesnis stačiakampiui. Taigi, riboje gauname **cilindroido tūrį**

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \lambda = \max\{d_i\}.$$

VIDEO

DVILYPIO INTEGRALO VIZUALIZACIJA



DVILYPIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ



Kadangi funkcija $f(x, y)$ – aprėžta ir integruojama, tai riba egzistuoja ir bus lygi tūrio reikšmei.

Taigi dar karta: **tolydžios, neneigiamos funkcijos $f(x, y)$ integralas lygus cilindroido tūriui.**

Jei $f(x, y) = 1, \forall x \in D$, tai

$$\iint_D dx dy = \iint_D dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = S_D - \text{srities } D \text{ plotas.}$$

DVILYPIO INTEGRALO SAVYBĖS



$f(x, y)$ ir $g(x, y)$ – integruojamos srityje D ; $\alpha, \beta \in R$.

1) Tiesiškumas:

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

2) Adityvumas: Jeigu sritis $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, tai

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Geometrinė interpretacija duoda akivaizdų įrodymą:
cilindroido tūris = jo dalių tūrių sumai.

DVILYPIO INTEGRALO SAVYBĖS



3) Pastovaus ženklo savybė: Jeigu $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$, tai ir

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

4) Palyginimo savybė: Jeigu $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$, tai ir

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

T.y. aukštesnis cilindroidas turi didesnę tūrį, kai pagrindas D yra tas pats.

DVILYPIO INTEGRALO SAVYBĖS



5) Integralo modulio įvertis:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

6) Dvilypio integralo įvertis:

$$M = \max_{(x, y) \in D} f(x, y), \quad m = \min_{(x, y) \in D} f(x, y), \quad S_D - \text{sritys } D$$

plotas. Tada

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S_D.$$

DVILYPIO INTEGRALO SAVYBĖS

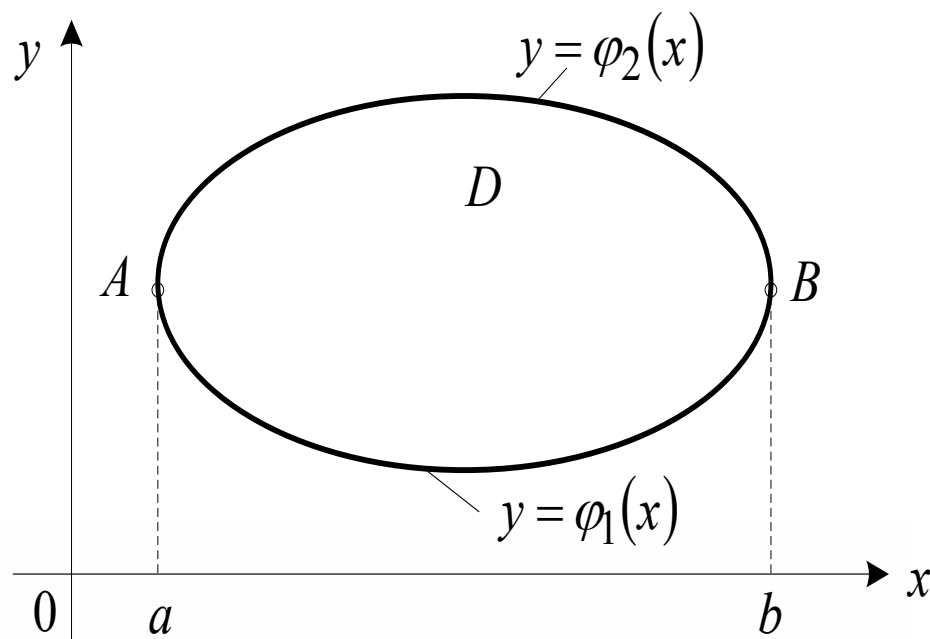


7) Vidutinės reikšmės teorema:

$f(x, y)$ – tolydi uždaroje srityje D . Tada srityje D egzistuoja toks taškas $P(x, y)$, kad

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(P) \cdot S_D$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS



1) Jeigu egzistuoja

$\varphi_2(x)$

$\int f(x, y)dy, \forall x \in [a, b]$, tai

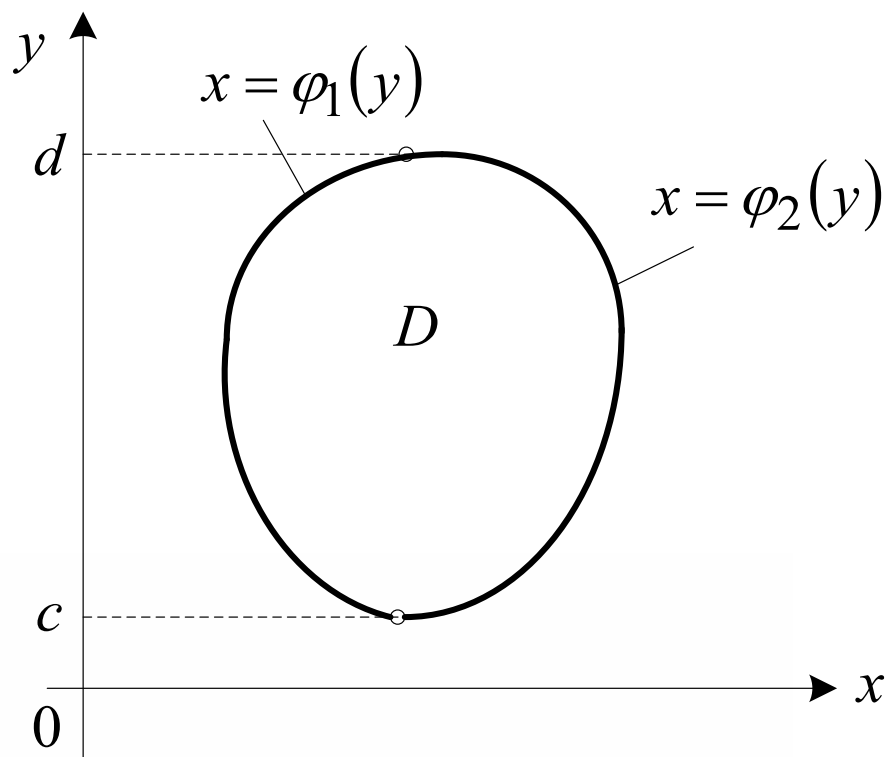
$\varphi_1(x)$

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

(kai D yra taisyklinga y atžvilgiu).

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS

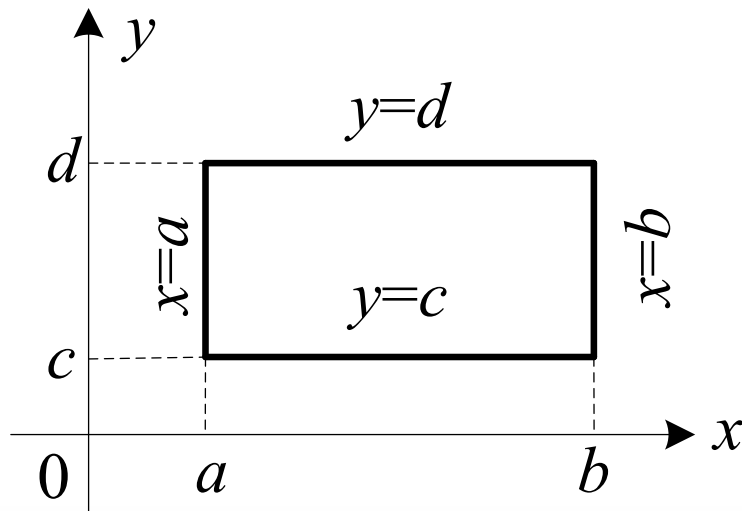


$$\begin{aligned} 2) \quad \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

(kai D yra taisyklinga x atžvilgiu).

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS



3) Kai sritis D yra stačiakampis:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

tai

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS

<https://www.symbolab.com/solver/double-integrals-calculator>

Pavyzdys: 1) Apskaičiuoti: $\int_0^1 dx \int_3^5 (x + y) dy.$

2) Apskaičiuoti: $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$

$$D = \{(x, y) \mid y = 0, y = x^2, x = 1\}.$$

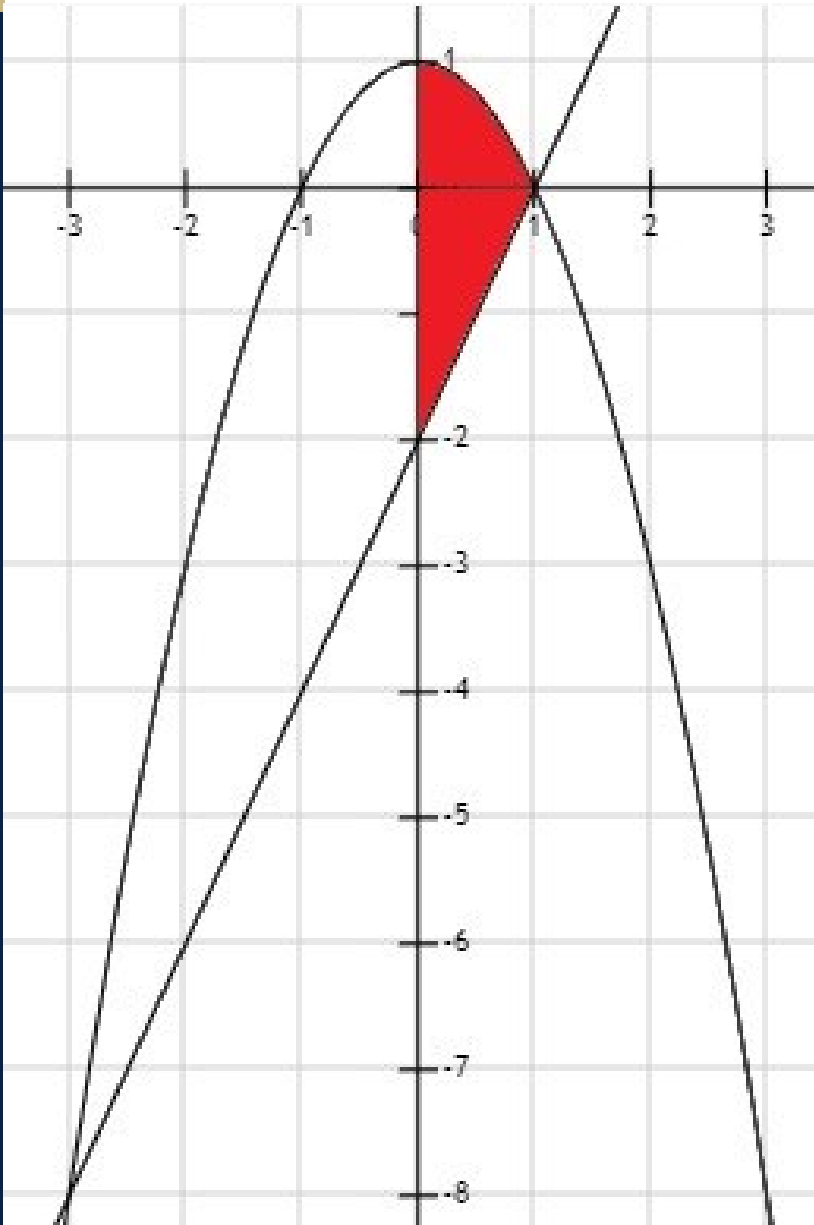
DVILYPIŲ INTEGRALŲ RĖŽIŲ KEITIMAS

Pavyzdys. Pakeiskite integralo

$$\int_0^1 dx \int_{2x-2}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

integravimo tvarką;

DVILYPIŲ INTEGRALŲ RĖŽIŲ KEITIMAS



$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{1-x^2} f(x, y) dy &= \\ &= \int_{-2}^0 dy \int_0^{\frac{y}{2}+1} f(x, y) dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \end{aligned}$$

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Tais atvejais, kai integravimo sritį D riboja:

- apskritimų lankai,
- kreivės, kurių polinės lygtys nesudėtingos,

dvilypį integralą patogiau integruoti **polinėje koordinačių sistemoje**.

DVILYPIŠ INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Ryšys tarp Dekarto ir polinių koordinačių sistemų:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

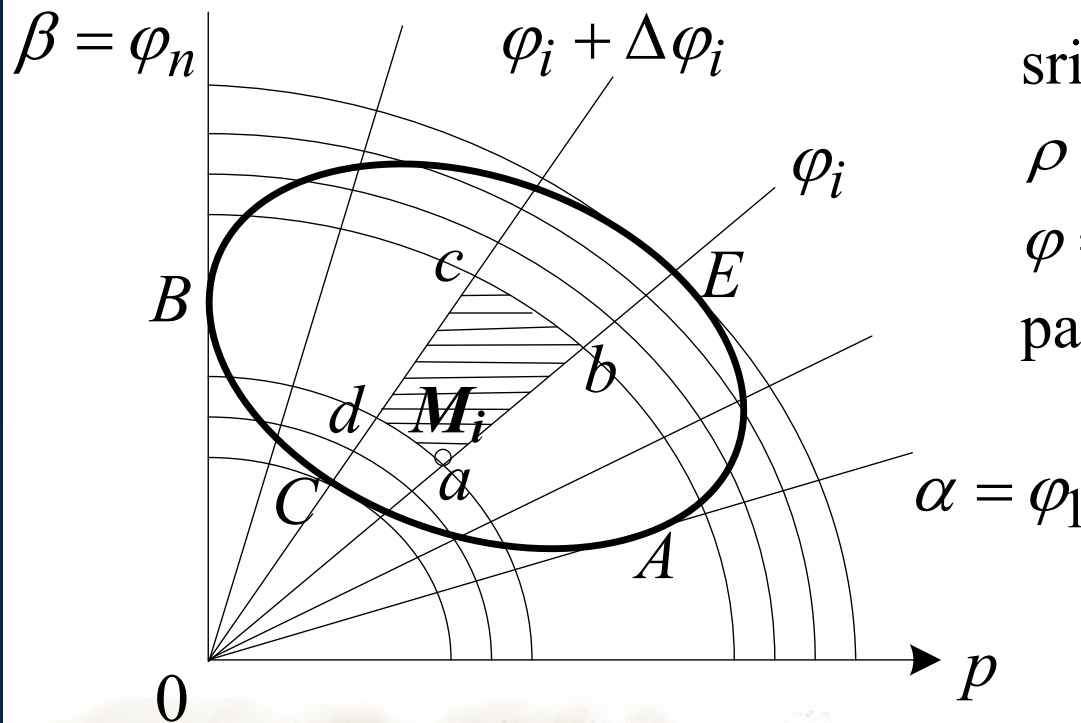
ρ – polinis spindulys ($0 \leq \rho < \infty$),

φ – polinis kampas ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

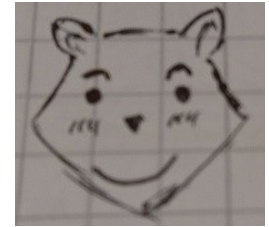


DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Tegul $f(x, y)$ – tolydi funkcija, apibrėžta uždaroje srityje D . Koncentriniais $\rho = \text{const}$ apskritimais ir $\varphi = \text{const}$ spinduliais padalijame sritį į n dalių.



DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE



Nagrinėkime i -ąjį plotelį – kreivinį keturkampį $abcd$, apribotą spinduliais ρ_i ir $\rho_i + \Delta\rho_i$ bei kampais φ_i ir $\varphi_i + \Delta\varphi_i$.

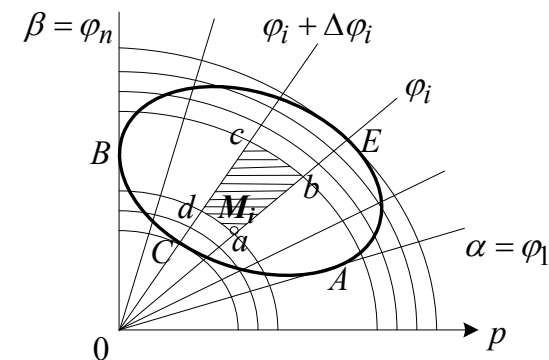
$abcd$ keturkampio kraštinės ab ilgis lygus $\Delta\rho_i$, o ad yra

apskritimo lankas $\frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha = R\alpha$.

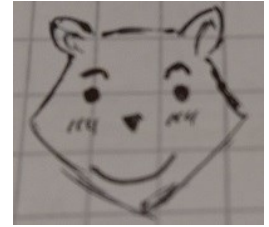
Mūsų žymėjimais būtų $\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$.

Šio keturkampio plotas ΔS_i , kai $n \rightarrow \infty$, bus $\approx$ stačiakampio plotui

$$\Delta S_i \approx \rho_i \cdot \Delta\varphi_i \cdot \Delta\rho_i.$$



DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

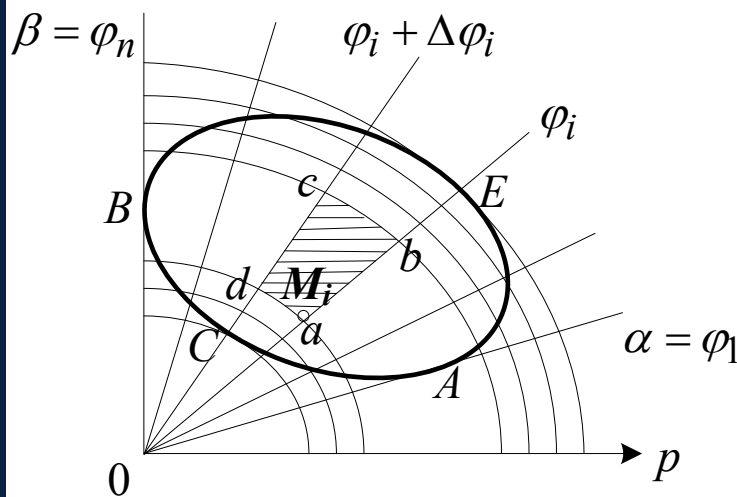


Kiekviena plotelyje parenkame tašką $M(x_i, y_i)$, patogumo dėlei – kreivinio keturkampio viršūnėje. Tuomet

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dS &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i = \\ &= \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\rho_i \cos \varphi_i, \rho_i \sin \varphi_i) \cdot \rho_i \cdot \Delta \varphi_i \cdot \Delta \rho_i = \\ &= \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi\end{aligned}$$

$dS = \rho d\rho d\varphi$ – ploto diferencialas polinėje koordinatų sistemoje.

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

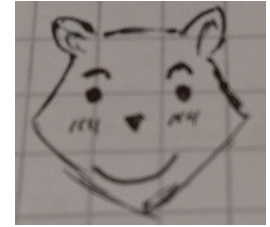


Jei sritis D yra taisyklinga (t.y. spindulys kerta kontūrą tik dviejuose taškuose)

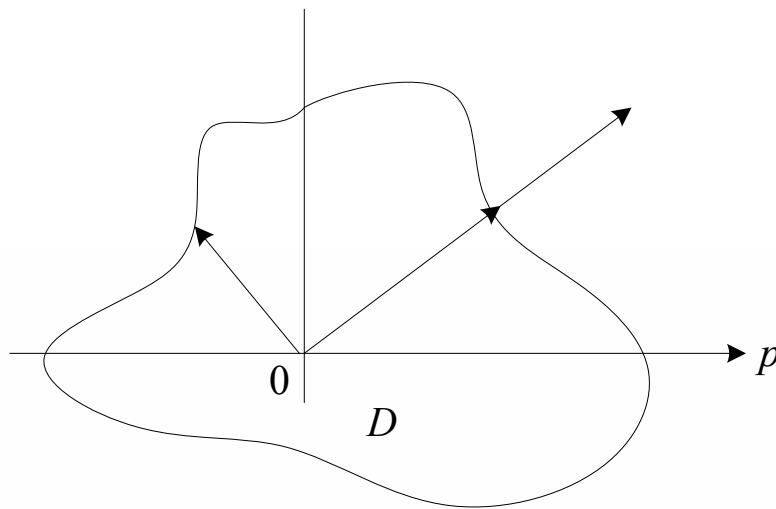
ir srities ACB lanko lygtis $\rho = \rho_1(\varphi)$,
o lanko AEB lytis $\rho = \rho_2(\varphi)$,
sritis prasideda kampu α ir baigiasi β ,
tai dvilypį integralą galima išreikšti
kartotiniais:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE



Jeigu polius bus integravimo srities viduje ir bet koks spindulys, einantis per polių kirs kontūrą 1 taške, tai formulė supaprastės



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \end{aligned},$$

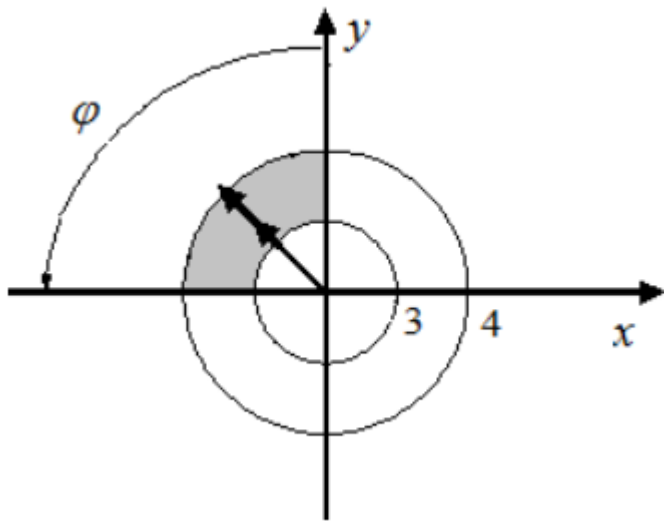
$\rho(\varphi)$ - kontūro lygtis polinėje koordinačių sistemoje.

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Pavyzdys: Apskaičiuokite dvilypį integralą $\iint_D \frac{2y}{x^2 + y^2} dx dy,$

kai integravimo sritis yra

$$D = \{(x; y) | 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \geq 0\}.$$



$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_3^4 \frac{2\rho \sin \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho$$

Ats: 2

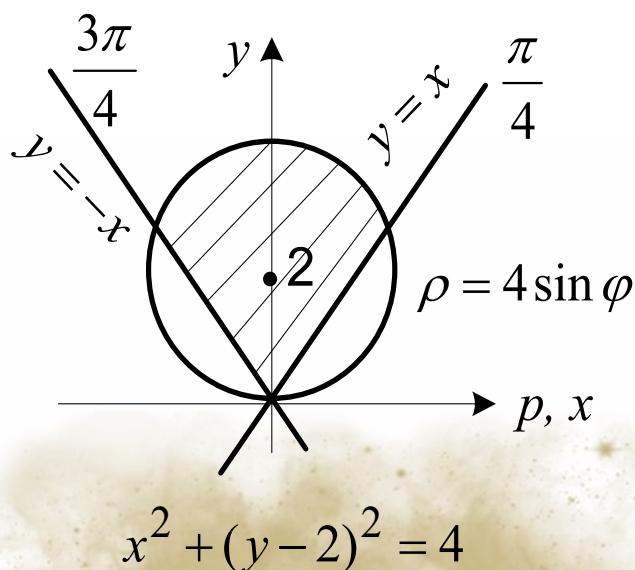
DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖSE KOORDINATĖSE

Pavyzdys:

Apskaičiuokite dvilypį integralą

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ kai sritis}$$

$$D = \{(x; y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4y, y \geq -x, y \geq x\}.$$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho$$

$$\text{Ats: } \frac{160\sqrt{2}}{9}$$

VIDEO

DVILYPIO INTEGRALO
VIZUALIZACIJA

DVILYPIO INTEGRALO
PAGRINDAI



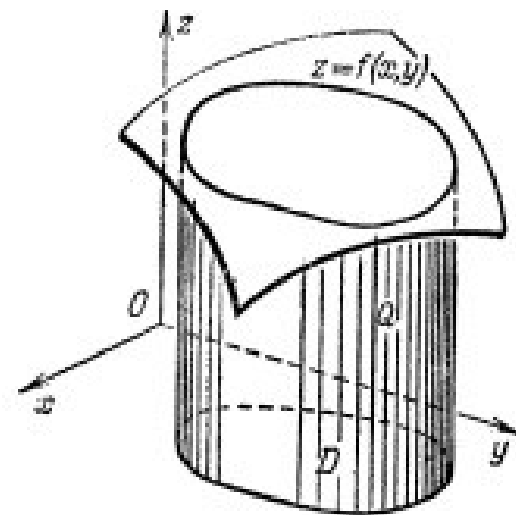
DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

- Geometrijoje: plokščios figūros plotas $S = \iint_D dx dy$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

- Kūno tūris (cilindro) :

Kai kūną iš viršaus riboja paviršius $f(x, y)$,
iš apačios to paviršiaus projekcija xOy plokštumoje - sritis D ,
iš šonų – cilindrinio paviršiaus,
kurio sudaromosios lygiagrečiai Oz ašiai



$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

- Kūno tūris, kai yra du paviršiai:

Kai kūną riboja iš viršaus paviršiaus $z = z_2(x, y)$;

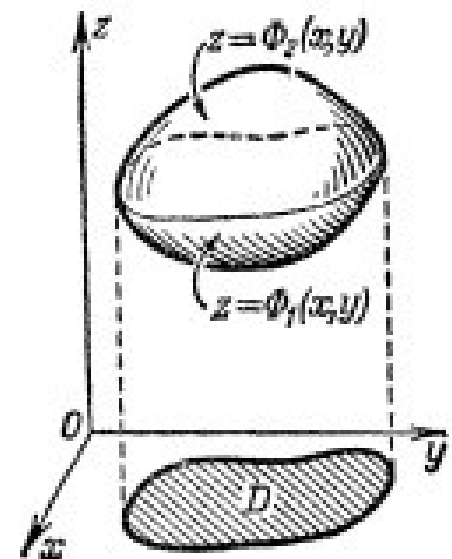
iš apačios $z = z_1(x, y)$;

iš šonų - cilindrinis paviršius, kurio sudaromosios $\parallel Oz$;

sritės D – kūno projekcija xOy ,

plokštumoje $z_2(x, y) \geq z_1(x, y), \forall (x, y) \in D$

$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy$$



DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

- Plokščios figūros masė

$$m = \iint_D p(x, y) dx dy, \quad \text{čia } p - \text{tankis}$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

Svorio centro koordinatės

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x p(x, y) dx dy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_D y p(x, y) dx dy,$$

Inercijos momentai

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) p(x, y) dx dy,$$

$$I_x = \iint_D y^2 p(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 p(x, y) dx dy,$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

- Paviršiaus plotų skaičiavimas :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy$$

KĄ IŠMOKOM

- Dvimatė integralinė suma ir sąvoka.
- Dvilypio integralo savybės;
- Dvilypio integralo geometrinė prasmė;
- Dvilypio integralo apskaičiavimas stačiakampėje koordinatinių sistemoje;
- Dvilypio integralo apskaičiavimas polinėje koordinatinių sistemoje.

KITA PASKAITA

- Pirmos eilės diferencialinės lygtys:
 - ✓ Pagrindinės sąvokos;
 - ✓ Koši uždavinys;
 - ✓ Diferencialinės lygtys atskiriamais kintamaisiais;
 - ✓ Homogeninės lygtys.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

- [Užduotys iš moodlo](#)
- Pakeiskite integralo $\int_0^1 dx \int_{2x-2}^{1-x^2} f(x, y) dy$ integravimo tvarką;
- Pakeiskite integralo $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$ integravimo tvarką;
- Pakeiskite integralo $\int_0^1 dy \int_{2y^2+1}^{4-y} f(x, y) dx$ integravimo tvarką.
- Apskaičiuokite integralą $\iint_D xy dx dy$, kai integravimo sritis D apribota tiesių $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.



Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt