

7 PASKAITA



**PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS.
PAGRINDINĖS SĄVOKOS. KOŠI UŽDAVINYS.
DIFERENCIALINĖS LYGTYS ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS,
HOMOGENINĖS LYGTYS. (2 val.)**

EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Pirmos eilės diferencialinių lygčių bendrosios sąvokos;
- Koši uždavinys;
- Diferencialinės lygtys su atskiriamaisiais kintamaisiais;
- Homogeninės lygtys;

Romeo ir Džuljeta ☺



$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}$$

<http://www.math.ualberta.ca/~devries/crystal/ContinuousRJ/introduction.html>³

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Apibrėžimas: Diferencialine lygtimi vadinama lygtis, siejanti nepriklausomą kintamąjį x , ieškomą funkciją y bei jos išvestines $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

arba

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Jei ieškomoji funkcija y yra tik vieno kintamojo x funkcija, tai diferencialinė lygtis vadinama **paprastąja**.

Diferencialinė lygtis, siejanti nežinomą kelių kintamųjų funkciją ir jos dalines išvestines, vadinama **dalinių išvestinių diferencialine lygtimi**.

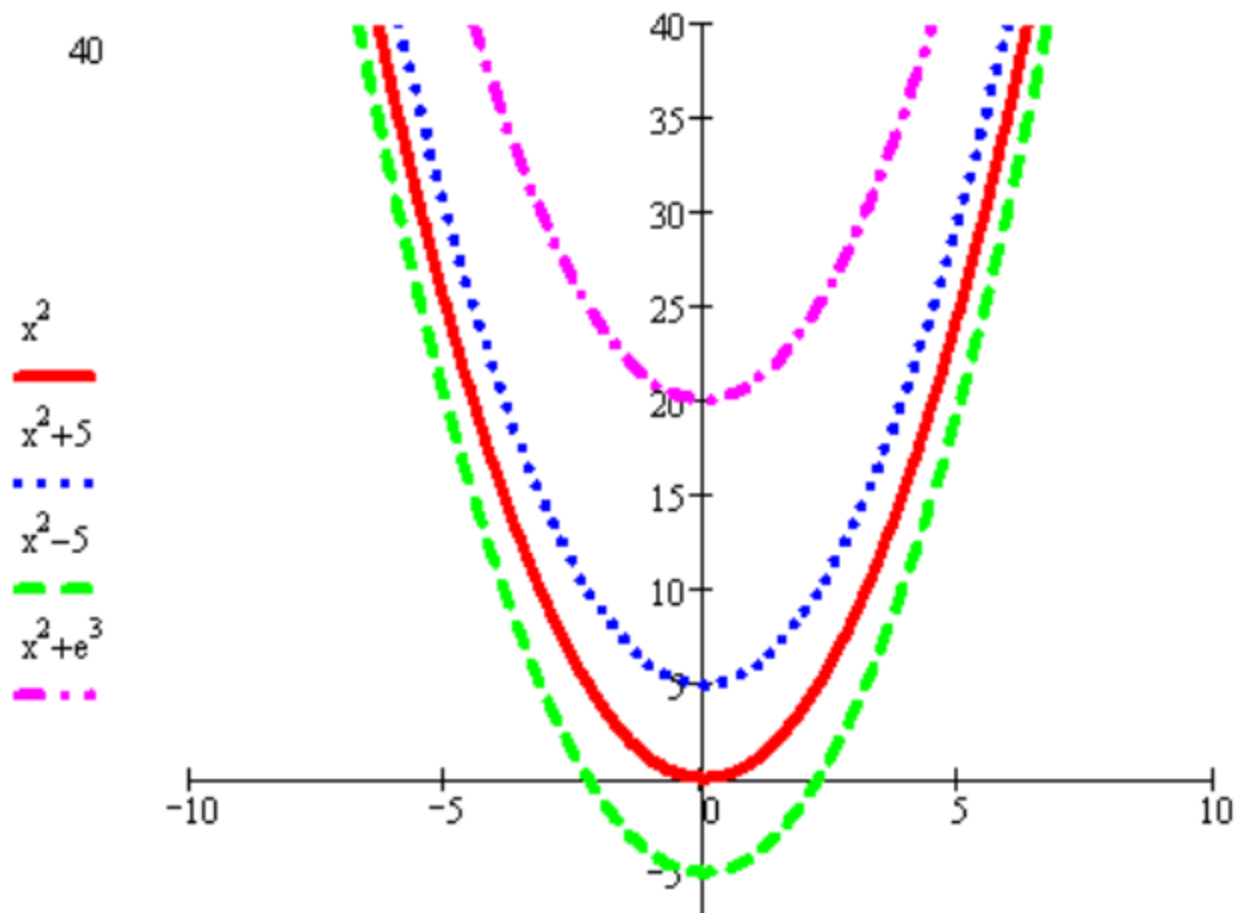
PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Apibrėžimas: Diferencialinės lygties eilė vadinama aukščiausios eilės išvestinės, esančios toje lygtyje, eilė.

Apibrėžimas: Diferencialinės lygties sprendiniu (arba integralu) vadinama funkcija $y = \varphi(x) (F(x, y) = 0)$, tenkinanti tą lygtį.

Kiekvieną diferencialinės lygties sprendinį atitinka tam tikra plokštumos kreivė, kuri vadinama **integraline diferencialinės lygties kreive**.

Pvz.
 $y' = 2x$



PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Apibrėšime pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, y, y') = 0 \text{ arba } y' = f(x, y).$$

Tokia lygtis turi be galo daug sprendinių.

Norėdami išskirti kurį nors vieną, pareikalausime, kad tą sprendinį atitinkanti integralinė kreivė eitų per tašką (x_0, y_0) , taigi būtų tenkinama sąlyga

$$y(x_0) = y_0.$$

Šios sąlygos vadinamos **pradinėmis sąlygomis**.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Apibrėžimas: Pirmos eilės diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ bendruoju sprendiniu vadinama funkcija $y = \varphi(x, C)$, priklausanti nuo laisvosios konstantos C ir tenkinanti sąlygas:

- a) su bet kokia C reikšme ji tenkina diferencialinę lygtį;
- b) kad ir kokios pradinės sąlygos $y(x_0) = y_0$ būtų, visada galima parinkti tokią C reikšmę C_0 , su kuria funkcija $y = \varphi(x, C_0)$ tenkintų tas pradines sąlygas.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Kartais diferencialinės lygties bendrasis sprendinys $y = \varphi(x, C)$ apibrėžiamas reiškiniu

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Toks sprendinys vadinamas **bendruoju diferencialinės lygties integralu**.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Apibrėžimas: Atskiru diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ sprendiniu vadinamas sprendinys, kuris gaunamas iš bendrojo sprendinio su kokia nors konstantos C reikšme C_0 . Iš bendrojo integralo $\Phi(x, y, C) = 0$ gautas atskirasis sprendinys vadinamas **atskiruoju integralu**.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Apibrėžimas: Lygties sprendinys $y = \varphi(x)$, kurio negalima gauti iš bendrojo sprendinio nė su viena C reikšme, vadinamas **ypatinguoju tos lygties sprendiniu**.

Apibrėžimas: Uždavinys, reikalaujantis rasti diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(x_0) = y_0$, vadinamas **Koši uždaviniu**.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

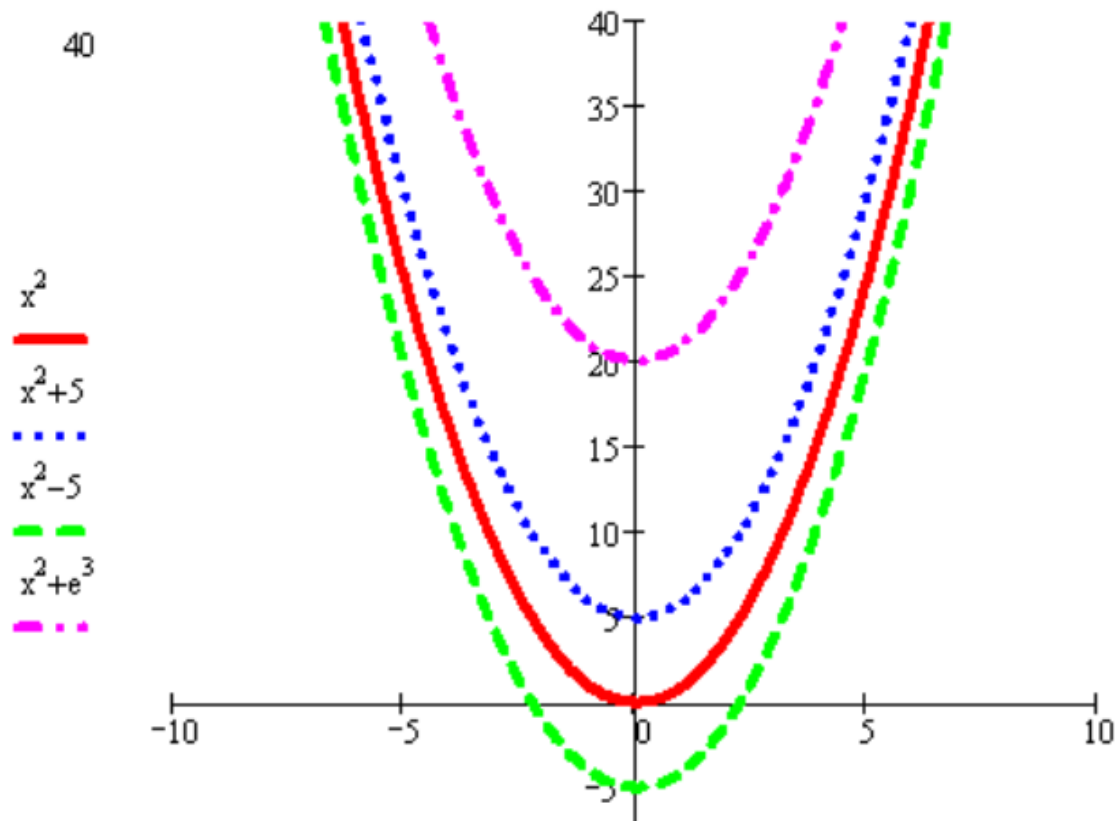
Teorema (Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema): Tarkime, kad funkcija $f(x, y)$ apibrėžta, tolydi ir turi tolydžią išvestinę $\frac{\partial f}{\partial y}$ tam tikroje plokštumos xOy dalyje D , kuriai priklauso taškas (x_0, y_0) . Tuomet egzistuoja taško x_0 aplinka $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kurioje egzistuoja vienintelis diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ sprendinys $y = \varphi(x)$, tenkinantis pradines sąlygas $(x_0, y_0) \in D$.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Geometriškai tai reiškia, kad yra vienintelė funkcija $y = \varphi(x)$, kurios grafikas eina per tašką $(x_0, y_0) \in D$.

Pvz.

$$y' = 2x$$



PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Kai Koši teoremos sąlygos neišpildytos, per tašką $(x_0, y_0) \in D$ gali eiti ne viena, o kelios integralinės kreivės.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Pavyzdys.

Diferencialinės lygties $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ bendrasis sprendinys $y = (x + C)^3$, tenkinantis pradinės sąlygas $y(0) = 0$, yra $y = x^3$.

Ši diferencialinė lygtis turi dar vieną sprendinį $y = 0$.

Taigi, per tašką $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eina ne viena, o dvi integralinės kreivės: $y = x^3$ ir $y = 0$.

Koši teoremos sąlygos neišpildytos, nes funkcijos $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ išvestinė $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ nėra tolydi taške $(0, 0)$.

DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

Diferencialinė lygtis

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

vadinama **diferencialine lygtimi su atskiriamais kintamaisiais.**

Padalinę abi lygybės puses iš $M_2(y)N_1(x)$, gauname **diferencialinę lygtį su atskirtais kintamaisiais:**

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

Šios lygties bendrasis integralas yra:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C.$$

Dalindami abi puses iš $M_2(y)N_1(x)$ laikėme, kad $M_2(y)N_1(x) \neq 0$.

Jei $x = a$, $y = b$ yra lygčių $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$ realios šaknys, tai $x = a$, $y = b$ bus diferencialinės lygties sprendiniai. Jei šie sprendiniai negaunami iš bendrojo sprendinio, gauname ypatinguosius sprendinius.

DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

Pavyzdžiai.

1. Išspręsti diferencialinę lygtį:

$$x^2 y + y + (x^2 - x^2 y) y' = 0$$

$$\text{ATS: } x - \frac{1}{x} - y + \ln|y| = C$$

2. Išspręskite Koši uždavinį:

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

$$\text{ATS: } y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Apibrėžimas: Funkcija $f(x, y)$ vadinama kintamųjų x ir y
 m -ojo matavimo homogenine funkcija, jei

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \quad t \in R.$$

Pavyzdys.

$$f(x, y) = x^3 y + x^4 + y^4$$

$$f(tx, ty) = t^3 x^3 ty + t^4 x^4 + t^4 y^4 = t^4 \underbrace{(x^3 y + x^4 + y^4)}_{f(x, y)}$$

Ši funkcija yra 4-ojo matavimo (laipsnio) homogeninė funkcija.

HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Apibrėžimas: Diferencialinė lygtis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

kur P ir Q to paties matavimo homogeninės funkcijos, vadinama **pirmos eilės homogenine diferencialine lygtimi**.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Kadangi P ir Q to paties matavimo homogeninės funkcijos, tai jų santykis bus nulinio matavimo homogeninė funkcija.

Todėl homogeninė bus ir lygtis

$$y' = g(x, y),$$

kurios $g(x, y)$ - nulinio matavimo homogeninė funkcija.

HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Homogeninės diferencialinės lygties sprendinio radimui įvedamas keitinys

$$y = ux, \quad y' = u'x + x'u = u'x + u,$$

po kurio įvedimo gaunama lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais.

HOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Pavyzdžiai.

1. Raskite diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$xy' = y(\ln y - \ln x)$$

$$\text{ATS: } y = xe^{Cx+1}$$

2. Raskite Košį uždavinio sprendinį:

$$x - y + xy' = 0, y(1) = 3$$

$$\text{ATS: } y = x(3 - \ln|x|)$$

- Pirmos eilės diferencialinės lygtys:
 - ✓ Pagrindinės sąvokos;
 - ✓ Koši uždavinys;
 - ✓ Diferencialinės lygtys atskiriamais kintamaisiais;
 - ✓ Homogeninės lygtys.

- Tiesinės ir Bernulio lygtys.
- Pilnojo diferencialo lygtys.
- Aukštesnių eilių diferencialinės lygtys, Koši uždavinys.
- Antros eilės diferencialinių lygčių atskiri atvejai

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt