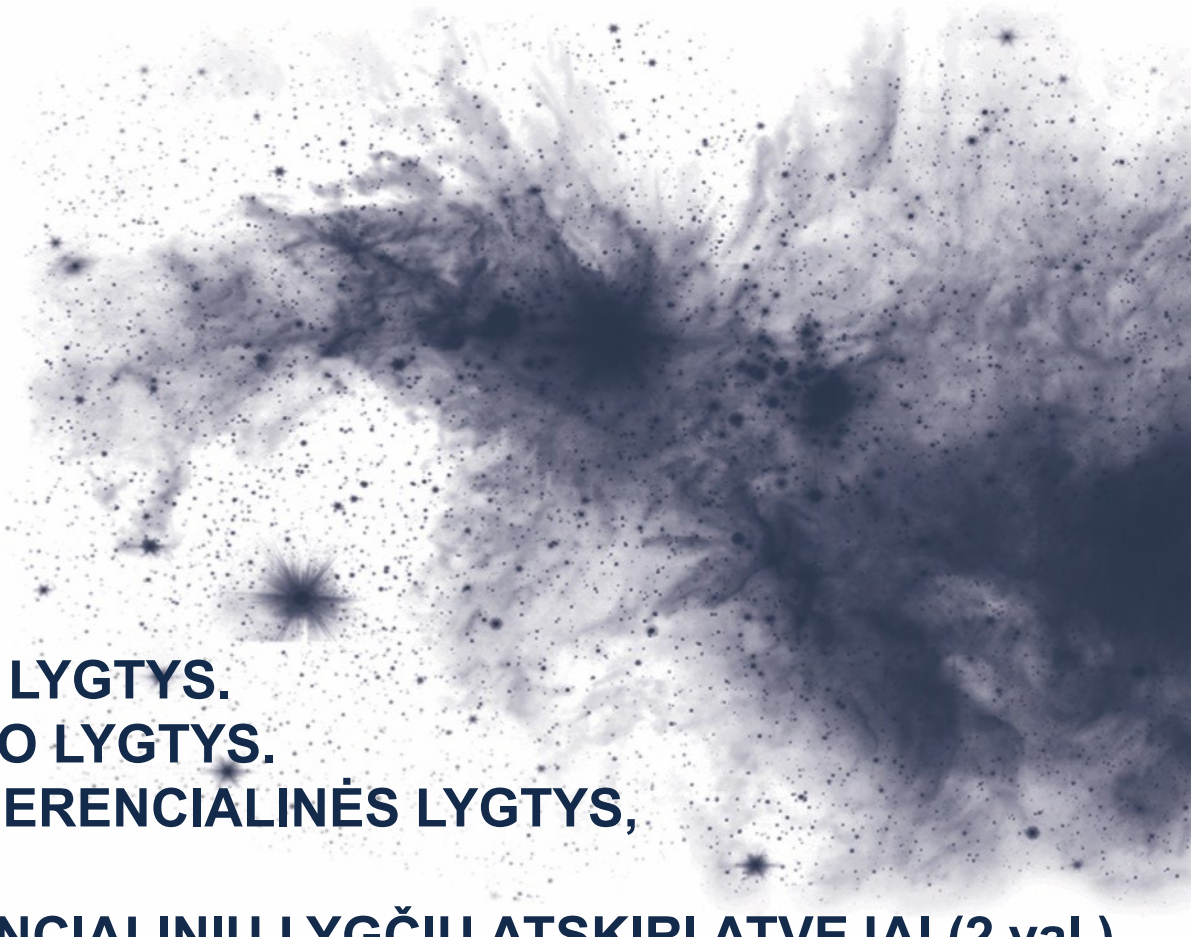


8 PASKAITA

A large, ethereal image of a cosmic dust cloud or nebula occupies the right half of the slide. It features a dense, dark central region with wispy, lighter-colored filaments and numerous small, bright specks resembling stars or dust grains scattered throughout.

**TIESINĖS IR BERNULIO LYGTYS.
PILNOJO DIFERENCIALO LYGTYS.
AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS,
KOŠI UŽDAVINYS.
ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ ATSKIRI ATVEJAI.(2 val.)**

EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Tiesinė lygtis;
- Bernulio lygtis;
- Pilnojo diferencialo lygtis.

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Apibrėžimas: Pirmos eilės tiesinė diferencialinė lygtimi vadiname lygtį

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

čia $P(x), Q(x)$ - tolydžios tam tikrame intervale funkcijos.

Sprendimo metodai:

- Kintamojo keitimo metodas
- Konstantų variacijos metodas



PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Kintamojo keitimo metodas:

Lygtis sprendžiama naudojant keitinį $y = uv$,
čia $u(x), v(x)$ - tolydžiai diferencijuojamos funkcijos.

Įrašę y išraišką į lygtį, gauname

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$\text{arba } u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Funkciją v parenkame taip, kad $v' + P(x)v = 0$.

Ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais.

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Išsprendę ją, gauname

$$v = C_1 e^{-\int P(x) dx}.$$

Įrašę išraišką į lygtį $u'v = Q(x)$, gauname

$$C_1 e^{-\int P(x) dx} u' = Q(x)$$

Ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais.

Išsprendę ją, gauname

$$u = \frac{1}{C_1} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2.$$

Įrašę u ir v išraiškas, gauname, kad bendrąjį sprendinį:

$$y = uv = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Pavyzdys. Išspręskite lygtį kintamojo keitimo metodu:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^3 e^x - 1.$$

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Konstantų variacijos metodas:

Prilyginę lygties (1) dešinę pusę nuliui, gauname lygtį

$$y' + P(x)y = 0, \quad (2)$$

kuri yra vadinama **pirmos eilės tiesine homogenine diferencialine lygtimi**.

Išsprendę šią lygtį kintamųjų atskyrimo metodu, gauname jos sprendinį

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Konstantą C pakeičiame tam tikra funkcija $C(x)$, kad gautume (2) bendrąjį lygties sprendinį:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Įrašę šį sprendinį į (1) lygtį, rasime konstantą $C(x)$:

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Įrašę $C(x)$ išraišką į (1) lygties bendrąjį sprendinį, gauname:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

PIRMOS EILĖS TIESINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Pavyzdys. Išspręskite lygtį Lagranžo metodu:

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2.$$

BERNULIO DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Apibrėžimas: Bernulio diferencialine lygtimi vadiname lygtį

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \quad (1)$$

čia $m \in R, m \neq 0, m \neq 1$.



Kai $m = 0$ - lygtis yra tiesinė,
kai $m = 1$ - lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

Šią lygtį sprendžiame naudodami keitinį $y = uv$.

BERNULIO DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Pavyzdys. Raskite lygties $y' + \frac{y}{x} = -xe^x y^2$ bendrąjį sprendinį.

PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTYS

Apibrėžimas: Dviejų kintamųjų funkcijos $u = u(x, y)$ **pilnuoju diferencialu** vadinamas reiškiny

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$



PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTYS

Teorema: Tarkime, kad $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ tolydžios tam tikroje srityje E funkcijos, turinčios šioje srityje tolydžias išvestines $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Reiškinys $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ yra tam tikros funkcijos $u = u(x, y)$ pilnasis diferencialas tada ir tik tada, kai

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

visuose srities E taškuose.

PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTYS

Apibrėžimas: Diferencialinė lygtis $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ vadinama **pilnųjų diferencialų lygtimi**, kai jos kairioji pusė yra tam tikros funkcijos $u = u(x, y)$ pilnasis diferencialas du .

Tuomet lygtį galima užrašyti taip:

$$du = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad jos bendrasis sprendinys yra

$$u(x, y) = C.$$

PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTYS

Pavyzdys. Patikrinti, ar lygtis

$$(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0$$

yra pilnųjų diferencialų lygtimi.

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Apibrėžimas: Lygtis

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

vadinama **n-tos eilės diferencialine lygtimi.**

Kartais ją galima išreikšti taip: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Bendras n -tosios eilės diferencialinės lygties sprendinys priklauso nuo konstantų $C_1, \dots, C_n$ ir turi išraišką

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

čia φ – n kartų tolydžiai diferencijuojama funkcija.

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Koši uždavinys.

Ieškomas lygties $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sprendinys, tenkina pradines sąlygas

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{0,1}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \dots$$

čia $y_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}$ - tam tikri skaičiai.

AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS KOŠI UŽDAVINYS

Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema:

Tarkime, kad funkcija $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ir jos dalinės išvestinės

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

yra tolydžios tam tikroje srityje D , kuriai priklauso taškas $(x_0, y_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1})$. Tuomet yra taško x_0 aplinka $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kurioje egzistuoja vienintelis diferencialinės lygties $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sprendinys $y = y(x)$, tenkinantis pradines sąlygas:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{0,1}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}.$$

ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ $y'' = f(y', y, x)$ ATSKIRI ATVEJAI

Nagrinėsime diferencialines lygtis, kurios sprendžiamos mažinant jų eilę.

1. $y'' = f(x)$

Tokia lygtis sprendžiama nuosekliai integruojant abi lygybes puses du kartus.

Pavyzdys. $y'' = \cos x - x$

ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ $y'' = f(y', y, x)$ ATSKIRI ATVEJAI

2. $y'' = f(x, y')$ Tokiose lygtyse nėra funkcijos y .
Jos sprendžiamos naudojant keitinius

$$y' = p(x), y'' = p'.$$

Įrašę šias išraiškas, gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį $p' = f(x, p)$.

Išsprendę šią lygtį nežinomojo p atžvilgiu, vietoje p įrašę y' , gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį $y' = p(x)$.

Pavyzdys.

$$1) xy'' + y' = 0; \quad 2) xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ $y'' = f(y', y, x)$ ATSKIRI ATVEJAI

3. $y'' = f(y, y')$ Tokiose lygtyse nėra kintamojo x .

Lygtį sprendžiame taikydami keitinį

$$y' = p(y), \quad y'' = p' \cdot p.$$

Įrašę y'' ir y' , gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį: $p' \cdot p = f(y, p)$.

Ją suintegruvę, nustatome p priklausomybę nuo y . Įrašę vietoj p išvestinę y' , gauname pirmosios eilės dif.lygtį, kurios bendrasis sprendinys ir yra duotosios lygties bendrasis sprendinys.

Pavyzdys. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0.$

- Tiesinės ir Bernulio lygtys;
- Pilnojo diferencialo lygtys;
- Aukštesnių eilių diferencialinės lygtys, Koši uždavinys;
- Antros eilės diferencialinių lygčių atskiri atvejai.

- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygtys;
- Vronskio determinantas;
- Fundamentalioji sprendinių sistema;
- Tiesiniškai priklausomi, nepriklausomi sprendiniai;
- Teorema apie bendrojo sprendinio struktūrą;
- Ostrogradskio ir Liuvilio formulė.

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt