

9 PASKAITA

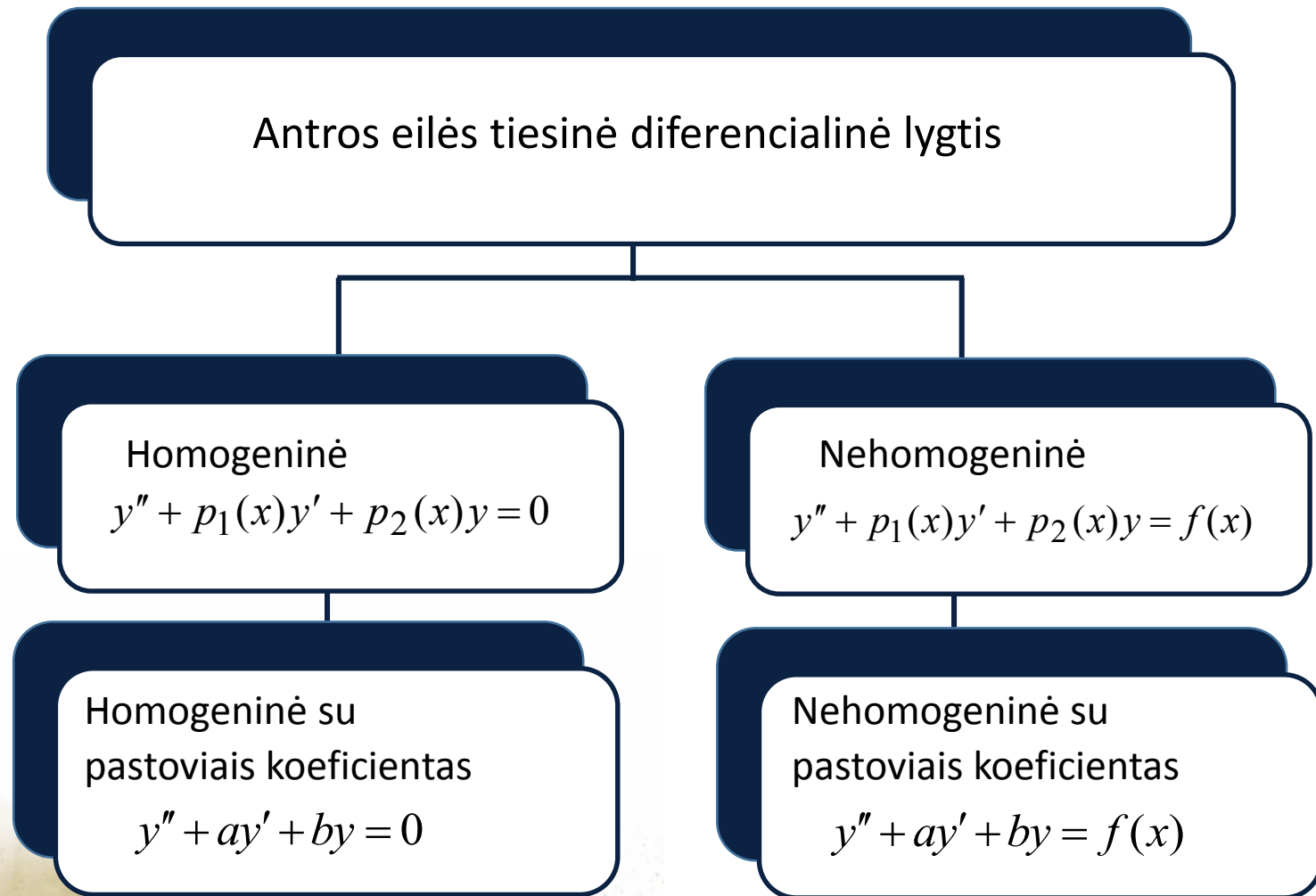
**ANTROS EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIF. LYGTYS.
JŲ SPRENDIMO SAVYBĖS.
ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS
DIFERENCIALINĖS LYGTYS.(2 val.)**

EGZAMINO PRIORITETINIAI KLAUSIMAI

- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygtys;
- Tiesiškai nepriklausomi sprendiniai;
- Vronskio determinantas, jo taikymas tiesiniam priklausomumui nustatyti;
- Fundamentalioji sprendinių sistema;
- **Teorema apie bendrojo sprendinio struktūrą (su įrodymu);;**
- Antros eilės tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys;
- **Teorema apie antros eilės tiesinės nehomogeninės dif. lygties bendrojo sprendinio struktūrą (be įrodymo);**

P.S. Žinoti apibrėžimus, mokėti patikrinti ar sprendiniai tiesiškai nepriklausomi, mokėti apskaičiuoti Vronskio determinantą, mokėti sudaryti lygtį, kai žinoma jos fundamentalioji sprendinių sistema.

ANTROS EILĖS TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS



ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Apibrėžimas: Diferencialinė lygtis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

vadinama antros eilės **tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi**.

Čia $p_1(x), p_2(x), f(x)$ - tolydžios tam tikrame intervale funkcijos.

Kai $f(x) \equiv 0$, lygtis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (2)$$

vadinama antros eilės **tiesine homogenine diferencialine lygtimi**.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Apibrėžimas: Funkcija $y = y(x, C_1, C_2)$, priklausanti nuo konstantų C_1, C_2 , vadinama (2) **lygties sprendiniu**, jei ji tenkina duotąją lygtį, ir iš jos, parinkę konkrečias konstantų C_1, C_2 reikšmes, galime gauti atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \in (a, b).$$

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Apibrėžimas: Tarkime, kad funkcijos $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ yra diferencijuojamos intervale (a, b) .

Determinantas

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)$$

vadinamas **Vronskio determinantu**.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Apibrėžimas: Tarkime, kad y_1 ir y_2 yra atskirieji sprendiniai. Sakysime, kad jie sudaro **fundamentaliąją sprendinių sistemą**, jei

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \text{ intervale } (a, b).$$

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



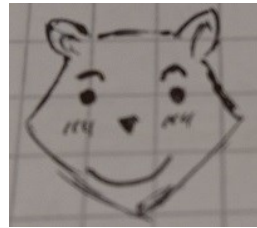
Teorema (apie bendrojo sprendinio struktūrą):

Kai y_1 ir y_2 sudaro fundamentaliąją (2) lygties sprendinių sistemą, tai bendrasis (2) lygties sprendinys išreiškiamas formule:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

C_1, C_2 - konstantos.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Įrodymas. Iš pradžių įrodysime, kad $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ tenkina (2) lygtį. Kadangi y_1 ir y_2 yra atskirieji sprendiniai, tai

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0.$$

Todėl įrašę y išraišką į (2) lygtį, gauname

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p_1(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + p_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= \\ = C_1(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) &= \\ = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Vadinasi, y tenkina (2) lygtį.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Dabar tarkime, kad duotos pradinės sąlygos

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \in (a, b).$$

Irašius pradinės sąlygas į sprendinį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0, \end{cases}$$

kurią sprendžiame konstantų C_1, C_2 atžvilgiu. Šios sistemos determinantas

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

yra lygus Vronskio determinantui taške $x_0 \in (a, b)$.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Kadangi y_1 ir y_2 sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai šis determinantas nelygus nuliui.

Todėl lygčių sistema turi vienintelį sprendinį C_1^*, C_2^* .

Įrašę gautas konstantų reikšmes, gauname atskirtąjį sprendinį

$$y = C_1^* y_1 + C_2^* y_2,$$

tenkinantį duotąsias pradines sąlygas. Vadinasi,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

yra bendrasis (2) lygties sprendinys.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

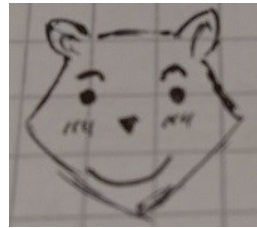
Pavyzdys. Duota diferencialinė lygtis

$$y'' + \frac{y'}{x(1 - \ln x)} - \frac{y}{x^2(1 - \ln x)} = 0.$$

Ar funkcijos $y_1 = x$, $y_2 = \ln x$ sudaro lygties
fundamentaliąją sprendinių sistemą?

Užrašykite šios lygties bendrąjį sprendinį.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Apibrėžimas: Sakysime, kad funkcijos y_1 ir y_2 yra **tiesiškai nepriklausomos** intervale (a, b) , jei lygybė

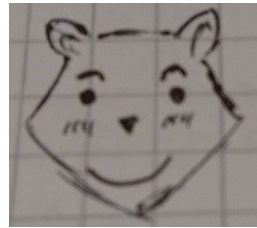
$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0,$$

teisinga tada ir tik tada, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Jei funkcijos y_1 ir y_2 yra **tiesiškai priklausomos**, tai egzistuoja tokia konstanta C , kad

$$\frac{y_1}{y_2} = C \text{ arba } y_1 = C y_2.$$

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



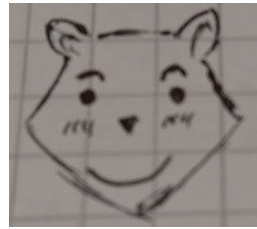
Išvada: Jei santykis $\frac{y_1}{y_2} = \text{const}, \forall x(a, b)$, tai y_1 ir y_2 tiesiškai priklausomos, ir tiesiškai nepriklausomos, jei $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}, \forall x(a, b)$.

Pavyzdys: Raskite tiesiškai priklausomus sprendinius:

a) $y_1 = x, y_2 = \ln x$,

b) $y_1 = \sin 2x, y_2 = \sin x \cos x$.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Teorema: Jei funkcijos y_1 ir y_2 yra tiesiškai priklausomos intervale (a, b) , tai

$$W(y_1, y_2) = 0 \text{ su visais } x \in (a, b).$$

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



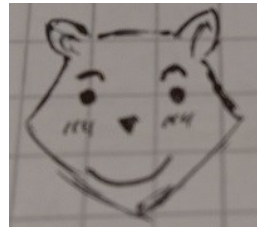
Apibrėžimas: Bet kurie du tiesiškai nepriklausomi tiesinės homogeninės diferencialinės lygties sprendiniai sudaro **fundamentaliąją sprendinių sistemą**.

Pavyzdys: Kurios sprendinių poros sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą?

a) $y_1 = x, y_2 = \ln x,$

b) $y_1 = \sin 2x, y_2 = \sin x \cos x .$

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS



Teorema: Kai y_1 ir y_2 yra tiesiškai nepriklausomi lygties

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

atskirieji sprendiniai, tai funkcija

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

yra šios lygties bendrasis sprendinys.

ANTROS EILĖS TIESINĖ HOMOGENINĖ DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Išspręsti antros eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį **su kintamais koeficientais** bendruoju atveju negalima, bet jei žinomas vienas atskirasis sprendinys, bendrasis sprendinys gali būti surastas.

OSTROGRADSKIO IR LIUVILIO FORMULĖ

Nagrinėkime lygtį

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \quad (3)$$

Tarkime, kad y_1 yra tiesiškai nepriklausomas (3) lygties sprendinys ir jis žinomas.

Tada kitą tiesiškai nepriklausomą sprendinį y_2 galima rasti naudojantis formule:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Ši formulė vadinama **Ostrogradskio - Liuvilio formule**.

LYGTIES SUDARYMAS



Kartais tenka spręsti atvirkštinį uždavinį – diferencialinės lygties fundamentalioji sprendinių sistema žinoma, o reikia gauti pačią lygtį

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

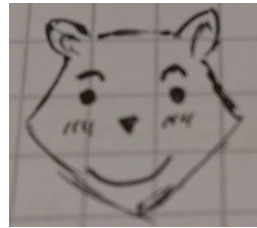
Žinome, kad šios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

Kadangi y galima išreikšti per y_1 ir y_2 , tai visas trejetas y, y', y'' yra tiesiškai priklausomos funkcijos.

Tuomet iš jų sudarytas Vronskio determinantas turi būti lygus nuliui, t.y.

LYGTIES SUDARYMAS



$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Išskleidę šį determinantą trečiojo stulpelio elementais, gausime antrosios eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį.

Pavyzdys. Sudarykime antrosios eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį, kurios fundamentalioji sprendinių sistema yra $y_1 = \ln x$ ir $y_2 = x$.

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Nagrinėsime lygtį

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

čia $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ - tolydžios intervale (a, b) funkcijos.

Ji vadinama **antros eilės tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi su kintamais koeficientais**.

ANTROS EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Teorema (bendrojo sprendinio struktūra):

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra lygus (1) lygtį atitinkančios homogeninės lygties bendrojo sprendinio $\bar{y}$ ir nehomogeninės lygties atskirojo sprendinio y^* sumai:

$$y = \bar{y} + y^*.$$



- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygtys;
- Vronskio determinantas;
- Fundamentalioji sprendinių sistema;
- Tiesiniškai priklausomi, nepriklausomi sprendiniai;
- Teorema apie bendrojo sprendinio struktūrą;
- Ostrogradskio ir Liuvilio formulė;
- Antros eilės tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys;
- Teorema apie antros eilės tiesinės nehomogeninės dif. lygties bendrojo sprendinio struktūrą;

- Antros eilės tiesinės homogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;
- Antros eilės tiesinės nehomogeninės dif. lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas;

Medžiagą galima rasti:

www.tany.lt/stud

matematika2

Parengė: Tatjana Sidekerskienė

E-mail: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt