

Homogeninės I – os eilės diferencialinės lygtys. Kintamųjų atskyrimo metodas.

Lygtis $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, siejanti nepriklausomąjį kintamąjį x , nežinomą funkciją $y(x)$ ir jos išvestines $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ vadinama **diferencialine lygtimi**, o skaičius n – dif. lygties eile.

Funkcija, kurią įrašę į dif. lygtį, gauname tapatybę, vadinama tos lygties **sprendiniu**.

Funkcija, $y = \varphi(x, C)$ vad. lygties $y' = f(x, y)$ **bendruoju sprendiniu**, kai $a \leq x \leq b$, jei:

- 1) lygybė, $y = \varphi(x, C)$ srityje $D((x, y) \in D)$, $a \leq x \leq b$ yra išsprendžiama konstantos c atžvilgiu: $c = \psi(x, y)$
- 2) Su bet kokia konstantos c reikšme, f-ja $y = \varphi(x, C)$ yra lygties $y' = f(x, y)$ sprendinys.

Sprendinys $y = y(x)$ gautas iš bendrojo sprendinio $y = \varphi(x, C)$ vietoj c įrašius konkretų skaičių, vadinamas lygties **atskiru sprendiniu**.

Dif. lygtis $f_1(y)dy = f_2(x)dx$ vadinama **lygtimi su atskirtais kintamaisiais**. Suintegravę abi puses, rasime lygties bendrąjį sprendinį.

Jei lygtis turi bendresnį pavidalą – su **atskiriamaais kintamais** :

$M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0$, tai padaline abi puses iš $M_2(y) \cdot N_1(x) \neq 0$, gauname lygtį su atskirtais kintamaisiais: $\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0$.

Šiuo atveju reikia patikrinti ar dalinant lygtį iš sandaugos $M_2(y) \cdot N_1(x)$ neprarandami lygties sprendiniai, kurie gaunami, kai $M_2(y) = 0$ ir $N_1(x) = 0$, ir jie vadinami **ypatingaisiais lygties sprendiniais**.

1užd. Rasti dif. lygties $y \cdot y' = \frac{1-2x}{y}$ bendrąjį sprendinį.

2užd. Rasti dif. lygties $\frac{y}{y'} - \ln y = 0$ atskirą sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(2) = 1$.

Apibrėžimas: Funkcija $f(x, y)$ vadinama kintamųjų x ir y **m – tojo matavimo homogenine funkcija**, jei

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \quad t \in R.$$

Pavyzdžiui, funkcija $f(x, y) = x^3 y + x^4 + y^4$ yra 4 – tojo matavimo homogeninė funkcija, nes

$$f(tx, ty) = t^3 x^3 ty + t^4 x^4 + t^4 y^4 = t^4 (x^3 y + x^4 + y^4)$$

Apibrėžimas: Diferencialinė lygtis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

kurios $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ yra to paties matavimo homogeninės funkcijos, vadinama **pirmosios eilės homogenine diferencialine lygtimi**.

Lygties sprendimo algoritmas:

- 1) Įvedame keitinį $y = u x, y' = u'x + u$. Sutvarkę gauname lygtį su atskiriamaais kintamaisiais.
- 2) Gautą lygtį sprendžiame atskirdami kintamuosius.
- 3) Į gautą sprendinio išraišką įrašome $u = \frac{y}{x}$ ir gauname bendrąjį dif. lygties sprendinį.
- 4) Ieškome atskiro sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas: $y(x_0) = y_0$. (Į bendr. sprendinį įstatome $x = x_0, y = y_0$ ir gauname c ; vėliau c įstatome į bendr. sprendinį.)

Norėdami atpažinti homogeninę lygtį: į lygtį vietoj x įrašome tx , o vietoj $y \rightarrow ty$. Sutvarkius – lygtis turi nepasikeisti. **Kartais patogiau žymėti $x = u \cdot y$**

3užd. Išspręsti lygtį $y^2 + x^2 y' = x y y'$.

4užd. Raskime atskirąjį diferencialinės lygties $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas