

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

KREIVINIAI INTEGRALAI

2

2015METAI

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ – vadinamas **antrojo tipo kreiviniu integralu** kreive $L=AB$

Jei turime kreivę erdvėje R^3 ir jos taškuose duotas tolydžias f-jas $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, tai

R^3 :

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Integrale tikslumo dėlei reikėtų žymėti ir apėjimo kryptį:

L^+ – jei teigiama $\cup$,

L^- – jei neigiama $\cap$.

$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ – jei integralas uždaru kontūru.

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Skaičiavimas:

1. Jei kreivė erdvėje R^2 duota lygtimi $y = f(x)$ (jei f-jai $y = f(x)$ egzistuoja atvirkštinė f-ja $x = \psi(y)$ ir $y = f(x)$ – monotonišė atkarpoje AB), tada

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, f(x))dx + \int_c^d Q(\psi(y), y)dy$$

2. Kitais atvejais:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

1 užduotis. Apskaičiuoti $\int_L \frac{y^2}{1+x^2} dx + (1+x^2)dy$, kai

$L: y = \arctg(x), A(0; 0), B\left(1, \frac{\pi}{4}\right).$

ATS: $\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + 1$

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Skaičiavimas:

1. Jei kreivė erdvėje R^2 duota lygtimi $y = f(x)$ (jei f-jai $y = f(x)$ egzistuoja atvirkštinė f-ja $x = \psi(y)$ ir $y = f(x)$ – monotonišė atkarpoje AB), tada

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, f(x))dx + \int_c^d Q(\psi(y), y)dy$$

2. Kitais atvejais:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

2 užduotis. Apskaičiuoti $\int_L (x - y)dx + x \cdot dy$, kai

$L: y = 4 - x^2, A(1; 3), B(2, 0)$.

ATS: -29/6

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Skaičiavimas:

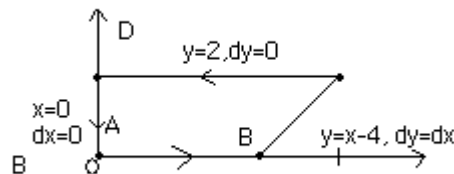
1. Jei kreivė erdvėje R^2 duota lygtimi $y = f(x)$ (jei f-jai $y = f(x)$ egzistuoja atvirkštinė f-ja $x = \psi(y)$ ir $y = f(x)$ – monotonišė atkarpoje AB), tada

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, f(x))dx + \int_c^d Q(\psi(y), y)dy$$

2. Kitais atvejais:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

3 užduotis. Apskaičiuoti $\oint_{L^+} (x^2 + y^2)dx + xy \cdot dy$, kai L^+ yra:



ATS: $-\frac{32}{3}$

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

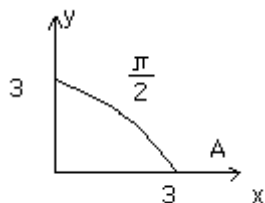
Kreivė duota parametrinėmis lygtimis erdvėje R^2 :

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) dt + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) dt$$

4 užduotis. Apskaičiuoti $\int_{AB} (x - 2y) dx + xy^2 dy$, kai AB – elipsės $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ lankas I ketvirtyje.

ATS: $\frac{9}{2}(\pi - 1)$

5 užduotis. Apskaičiuoti $\int_L \frac{x \cdot dy + y \cdot dx}{(x^2 + y^2)}$, kai $L: \begin{cases} x = 3\cos(t), \\ y = 3\sin(t), \\ A(3; 0), B(0; 3) \end{cases}$



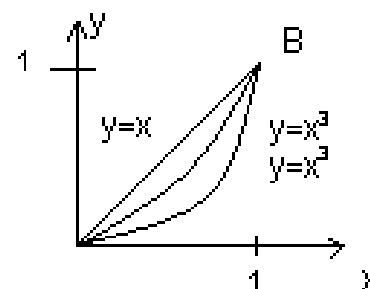
ATS: 0

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Skaičiuojant II-o tipo kreivinius integralus tenka pastebėti, kad kai kurie visiškai **nepriklauso nuo integravimo kelio**, o priklauso tik nuo pradinio ir galutinio taškų padėties.

6 užduotis. Apskaičiuoti $\int_{AB} 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy$, kai

$$AB: \begin{cases} y = x, \\ y = x^2, \\ y = x^3, \\ A(0; 0), B(1; 1) \end{cases}$$



ATS: 1

Priminimas:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

T: Jei f-jos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ yra apibrėžtos ir tolydžios drauge su dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir $\frac{\partial Q}{\partial x}$ vienajungėje srityje D , tada visos šios sąlygos yra ekvivalenčios:

1. $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, čia $L \in D$ ir yra glodi;

2. $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ nepriklauso nuo integralo kelio, čia $A, B \in D$;

3. reiškiny $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ yra tam tikros funkcijos $u(x, y)$, apibrėžtos srityje D , pilnasis diferencialas du : $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$;

4. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (Patikrinti ar šią sąlygą tenkina 6 užduotis.)

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Jei $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, tai $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ nepriklauso nuo integravimo kelio.

7 užduotis. Apskaičiuosime

$$I = \int_{(1;1)}^{(2;3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy$$

ATS: 20,5

Priminimas:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, f(x))dx + \int_c^d Q(\psi(y), y)dy$$
$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

II TIPO KREIVINIAI INTEGRALAI

Mechaninė prasmė: darbas, kurį atlieka materialus taškas, judėdamas kreive L , veikiantis jėgų $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, kurių projekcijos yra $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ į koordinatinių ašis

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

8 užduotis. Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga

$$\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j},$$

perkeldama materialųjį tašką kreive $L: y = x^2$ iš taško $A(1; 1)$ į tašką $B(-1; 1)$

$$\text{ATS: } \frac{14}{15}$$

Priminimas:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) dx$$

GRYNO FORMULĖ

Jei funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ bei jų dalinės išvestinės $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir $\frac{\partial Q}{\partial x}$ yra tolydžios uždaroje srityje D , tai

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \cdot dy = \oint_L P \cdot dx + Q \cdot dy$$

kai L – srities D kontūras, apeinamas teigiama kryptimi.

Plokščios srities D plotas :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y \cdot dx$$

9 užduotis. Taikydami Gryno formulę apskaičiuokite kreivinį integralą $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, kai kreivė L – $\triangle ABC$ kontūras, kai $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$, ribojantis sritį D , apeinama teigiama kryptimi.

ATS: $-\frac{4}{3}$

10 užduotis. Apskaičiuoti $\oint_L (x + 3y)^2 dx + (3x^2 + y)dy$, kai $D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

ATS: - 6

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

MEDŽIAGA GALIMA RASTI:
WWW.TANY.LT/STUD
MATEMATIKA2

PARENGĖ: TATJANA SIDEKERSKIENE

E-MAIL: TATJANA.SIDEKERSKIENE@KTU.LT