

Veiksmai su kompleksiniais skaičiais

$$\begin{aligned}i^1 &= i \\i^2 &= -1 \\i^3 &= -i \\i^4 &= 1\end{aligned}$$

Pažymėkime kvadratinės lygties $x^2 + 1 = 0$ vieną šaknį $i = \sqrt{-1}$.

Šis simbolis vadinamas **menamuoju vienetu**.

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ – kompleksinis skaičius, $\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė.

x – **realioji** kompleksinio skaičiaus dalis $x = \operatorname{Re} z$

y – **menamoji** kompleksinio skaičiaus dalis $y = \operatorname{Im} z$

Jungtinis skaičius $z = x + iy$ yra $\bar{z} = x - iy$.

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z = z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

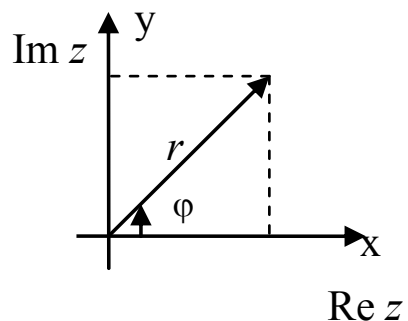
$$z = z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{Dviejų kompleksinių skaičių dalmenį paprasčiau gautume padauginę trupmenos}$$

$$\frac{z_1}{z_2} (z_2 \neq 0) \text{ skaitiklį ir vardiklį iš jungtinio vardikliui})$$

1Užduotis. Duota $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 7 - 5i$. Rasti kompleksinių skaičių jungtinius skaičius bei sumą, skirtumą, sandaugą ir dalybą.

Kompleksinį skaičių $z = x + iy$ galima vaizduoti dvimačiu vektoriumi, kurio koordinatės yra x ir y .



$$|z| = r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{kai } x \geq 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Kiekviena kompleksinį skaičių galima užrašyti trigonometrine forma: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

2 Užduotis. Pavaizduokite skaičių $z = 1 - i$ geometriškai.

3 Užduotis. Išreikšti trigonometrine forma skaičių $2 + 2\sqrt{3}i$.

Dauginant: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Dalinant: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4 Užduotis. Duota $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Rasti $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Kompleksinio skaičiaus **kėlimas laipsnių**(**Muavro formulė.**): $z^n = r^n (\cos n\varphi_0 + i \sin n\varphi_0)$

Šaknies traukimas: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

5 Užduotis. Raskite $(1+i)^6$, $\sqrt[3]{-1+i}$.

Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ rodiklinę formą užsirašo taip:

$$z = re^{i\varphi}$$

čia r – modulis, φ – argumento pagrindinė reikšmė.

Sandauga: kai $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, tai $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ir $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0)$

Kėlimas laipsnių: kai $z = re^{i\varphi}$, tai $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

Šaknies traukimas: kai $z = re^{i\varphi}$, tai $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}$, čia $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

6 Užduotis. Parašykite kompleksinį skaičių $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ rodikline forma. Apskaičiuokite jo 6-jį laipsnį.

7 Užduotis. Išspęskite lygtį $z^2 + 4z + 5 = 0$.

8 Užduotis. Raskite kompleksinio skaičiaus z realiąją ir menamąją dalį:

$$z = i^{29} - \frac{5z_1}{2 + i} + z_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$